

ANALYSE  
voor  
INDUSTRIEEL  
ONTWERPEN

wi10110

Deel 2

Emiel van Elderen  
Joost de Groot



# Inhoud

<b>1</b>	<b>Complexe getallen en nulpunten van polynomen</b>	<b>3</b>
1.1	Inleiding . . . . .	3
1.2	De invoering van de complexe getallen . . . . .	4
1.3	Complex toegevoegde, modulus en argument . . . . .	9
1.3.1	Complex toegevoegde . . . . .	9
1.3.2	Modulus en argument . . . . .	10
1.4	Meetkundige plaatsen . . . . .	14
1.5	Exponentiële schrijfwijze . . . . .	17
1.6	Nulpunten van polynomen . . . . .	20
1.6.1	Tweedegraadsvergelijkingen . . . . .	21
1.6.2	Binomiaalvergelijkingen . . . . .	22
1.6.3	De hoofdstelling van de algebra . . . . .	26
1.6.4	Polynomen met reële coëfficiënten . . . . .	28
1.7	Breuksplitsing . . . . .	30
1.8	Het benaderen van een nulpunt . . . . .	36
<b>2</b>	<b>Getallenrijen</b>	<b>45</b>
2.1	Het begrip rij . . . . .	45
2.2	De limiet van een rij . . . . .	50
2.2.1	Eindige limieten . . . . .	50
2.2.2	Oneigenlijke limieten . . . . .	54
2.2.3	Deelrijen . . . . .	55
2.3	Het berekenen van limieten . . . . .	57
2.3.1	Rekenregels voor limieten . . . . .	57
2.3.2	Rekenen met de symbolen $\pm\infty$ . . . . .	59
2.3.3	De insluitstelling . . . . .	61
2.3.4	Standaardlimieten . . . . .	62
2.4	Het berekenen van limieten van monotone recursieve rijen . . . . .	64
2.4.1	Een fundamentele eigenschap van de reële getallen . . . . .	64
2.4.2	Limieten van monotone recursieve rijen . . . . .	65
2.5	De convergentiefactor . . . . .	67
2.5.1	De definitie . . . . .	67
2.5.2	Het numeriek bepalen van de convergentiefactor . . . . .	71
2.5.3	Foutschattingen met behulp van de convergentiefactor . . . . .	76
2.6	De iteratieve rij en nulpuntsbenaderingen . . . . .	79

2.6.1	De iteratieve rij . . . . .	79
2.6.2	Nulpuntsbenaderingen . . . . .	84
2.6.3	Iteratieve rijen en groeimodellen . . . . .	89
<b>3</b>	<b>Lineaire differentiaal- en differentievergelijkingen</b>	<b>93</b>
3.1	Inleiding differentiaalvergelijkingen . . . . .	93
3.2	Lineaire differentiaalvergelijkingen met constante coëfficiënten . . . . .	95
3.2.1	Het gereduceerde probleem . . . . .	95
3.2.2	Het niet-gereduceerde probleem . . . . .	99
3.2.3	Beginvoorwaarden . . . . .	102
3.2.4	Enkele toepassingen . . . . .	105
3.3	Inleiding differentievergelijkingen . . . . .	107
3.4	Lineaire differentievergelijkingen met constante coëfficiënten . . . . .	110
3.4.1	Het gereduceerde probleem . . . . .	110
3.4.2	Het niet-gereduceerde probleem . . . . .	115
3.4.3	Beginvoorwaarden . . . . .	117
3.4.4	Enkele toepassingen . . . . .	119
<b>4</b>	<b>Differentiaalrekening</b>	<b>123</b>
4.1	Differentieerbaarheid en de afgeleide functie . . . . .	123
4.1.1	Inleiding en definities . . . . .	123
4.1.2	Differentiëren . . . . .	126
4.2	Functieonderzoek . . . . .	132
4.2.1	Functieonderzoek met de hand . . . . .	132
4.2.2	Functieonderzoek met behulp van de computer . . . . .	137
4.2.3	Enkele toepassingen van de differentiaalrekening . . . . .	139
4.3	De stelling van Taylor . . . . .	143
4.3.1	Lineaire benaderingen . . . . .	144
4.3.2	Taylorpolynomen . . . . .	147
4.3.3	De resttermen van Lagrange . . . . .	151
4.4	Het ordesymbool van Landau . . . . .	157
4.5	Limietberekening m.b.v. Taylor en ordesymbolen . . . . .	164
4.6	Toepassingen van de stelling van Taylor en de ordesymbolen . . . . .	166
4.6.1	De slinger: Een differentiaalvergelijking . . . . .	166
4.6.2	Benadering van het getal $e$ m.b.v. de stelling van Taylor . . . . .	167
4.6.3	Het doorwerken van een fout . . . . .	168
<b>5</b>	<b>Integraalrekening</b>	<b>171</b>
5.1	De definitie van de bepaalde integraal . . . . .	171
5.1.1	Een voorbeeld . . . . .	171
5.1.2	De definitie . . . . .	175
5.2	Eigenschappen van de integraal . . . . .	181
5.3	Het berekenen van een integraal . . . . .	183
5.4	Primitiveren . . . . .	189
5.4.1	Probleemstelling . . . . .	190
5.4.2	Standaardprimitieven . . . . .	190



5.4.3	De substitutieregel . . . . .	191
5.4.4	Partiële integratie . . . . .	194
5.4.5	Rationale functies . . . . .	196
5.4.6	Omkeerbare substituties . . . . .	198
5.4.7	Gebruik van een tabel . . . . .	200
5.5	Interpretaties van de integraal . . . . .	204
5.5.1	De oppervlakte van een vlakdeel . . . . .	204
5.5.2	Volume van een lichaam . . . . .	206
5.5.3	Lengte van een grafiek . . . . .	209
5.5.4	Arbeid . . . . .	210
5.6	Numerieke integratie . . . . .	217
5.6.1	De Trapeziumregel . . . . .	218
5.6.2	De Simpsonregel . . . . .	222
5.6.3	Foutschattingen op een tweede manier . . . . .	227
5.7	Oneigenlijke integralen . . . . .	231
5.7.1	De twee soorten oneigenlijke integralen . . . . .	231
5.7.2	Convergentiecriteria voor oneigenlijke integralen . . . . .	236
5.7.3	Oneigenlijke integralen numeriek . . . . .	239
<b>6</b>	<b>Krommen en oppervlakken in het platte vlak en de ruimte</b>	<b>243</b>
6.1	Functies . . . . .	243
6.2	Grafieken van functies . . . . .	245
6.3	Parametriseringen van krommen . . . . .	249
6.4	Vergelijkingen van krommen en oppervlakken . . . . .	253
6.5	Partiële afgeleide van functies van meerdere variabelen . . . . .	256
<b>7</b>	<b>Meervoudige integralen</b>	<b>262</b>
7.1	Tweevoudige integralen . . . . .	262
7.1.1	De definitie . . . . .	262
7.1.2	Integralen over rechthoeken . . . . .	264
7.1.3	Normaalgebieden . . . . .	267
7.1.4	Integralen over normaalgebieden . . . . .	269
7.1.5	Transformatie naar poolcoördinaten . . . . .	273
7.1.6	Transformaties in het algemeen . . . . .	277
7.1.7	Numerieke integratie van tweevoudige integralen . . . . .	283
7.2	Drievoudige integralen . . . . .	291
7.2.1	De definitie . . . . .	291
7.2.2	Normaalgebieden . . . . .	292
7.2.3	Integralen over normaalgebieden . . . . .	293
7.2.4	Transformaties . . . . .	296
<b>8</b>	<b>Uiterste waarden van functies van twee variabelen</b>	<b>304</b>
8.1	Inleiding . . . . .	304
8.2	Raakvlak, gradiënt en richtingsafgeleide . . . . .	305
8.2.1	Raakvlak . . . . .	305
8.2.2	Gradiënt en richtingsafgeleide . . . . .	307

8.3	Extremen van functies van twee variabelen . . . . .	310
8.3.1	Berekening van vrije extremen . . . . .	312
8.3.2	Berekening van randextremen . . . . .	323
<b>Formules</b>		<b>336</b>

## Hoofdstuk 5

# Integraalrekening

Reeds in de oudheid was men geïnteresseerd in oppervlakten en inhouden van velerlei meetkundige figuren: rechthoeken, driehoeken, parallellogrammen, cirkels, bollen, kegels enz. Met name Archimedes (287-212 v. Chr.) bereikte veel resultaten. Zo bepaalde hij in zijn boek “cirkelmeting” een tamelijk nauwkeurige benadering voor  $\pi$  middels ingeschreven en omgeschreven veelhoeken, en in zijn boek “over de bol en de cilinder” liet hij zien dat de inhoud van een bol  $2/3$  deel is van de inhoud van de omgeschreven cilinder.

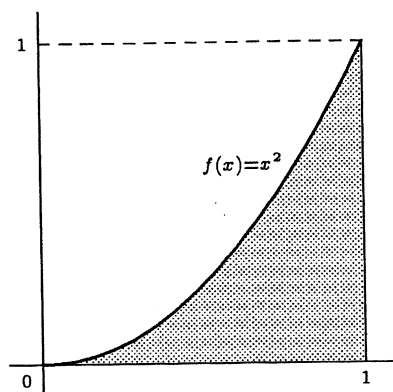
In de eerste paragraaf zullen we een voorbeeld behandelen, waarin de basisideeën van oppervlaktebepalingen gedemonstreerd worden. Vervolgens zullen we de definitie van de zogenaamde bepaalde integraal geven. Aan de hand van deze definitie zal later blijken dat vele situaties beschreven kunnen worden met een bepaalde integraal: De plaats van zwaartepunten, de lengten van krommen, de oppervlakten van lichamen, de verrichte arbeid, enz. Alle toepassingen van integraalrekening, of het nu in de economie, biologie, statistiek, meetkunde of electrotechniek is, zijn gebaseerd op *herkenning* van een integraal middels de definitie.

De definitie zoals wij hem geven, is opgesteld door Riemann (1826-1866), maar was in beginsel ook al bekend in de Griekse tijd. Het grote probleem was de *berekening* van de integraal. De grote doorbraak hiervan kwam aan het einde van de zeventiende eeuw met de verrassende ontdekkingen van Leibniz en Newton dat, middels primitiveren (het omgekeerde van differentiëren), bepaalde integralen berekend kunnen worden. Op de middelbare school is dit al gedeeltelijk behandeld. Omdat het, juist bij toepassingen, ontzettend belangrijk is dat een integraal herkend kan worden, zullen wij beginnen met de definitie van de integraal.

### 5.1 De definitie van de bepaalde integraal

#### 5.1.1 Een voorbeeld

We beginnen deze paragraaf met het volgende “oppervlakteprobleem”: Bepaal de oppervlakte van het gebied in het  $xy$ -vlak dat begrensd wordt door de  $x$ -as, de lijn  $x = 1$  en de grafiek van de functie  $f(x) = x^2$  (zie figuur 5.1). We zullen de oppervlakte van het gebied proberen te bepalen door gebruik te maken van rechthoeken. We maken een onderafschatting door rechthoeken te construeren waarvan de totale oppervlakte kleiner is dan die van het gebied en een bovenafschatting door rechthoeken te construeren waarvan de totale



**FIGUUR 5.1:** De oppervlakte onder de grafiek van de functie  $f(x) = x^2$

oppervlakte groter is dan die van het gebied. Voor onze eerste schatting verdelen we het interval  $[0, 1]$  in drie gelijke intervallen en we plaatsen op twee manieren rechthoeken, één keer ingeschreven (dus binnen het gebied) en één keer omgeschreven (dus uit het gebied stekend), zie figuur 5.2. Merk op dat de ingeschreven rechthoek behorende bij het interval  $[0, \frac{1}{3}]$  hoogte nul heeft. We zeggen wel dat deze “rechthoek” *gedegeneerd* is.

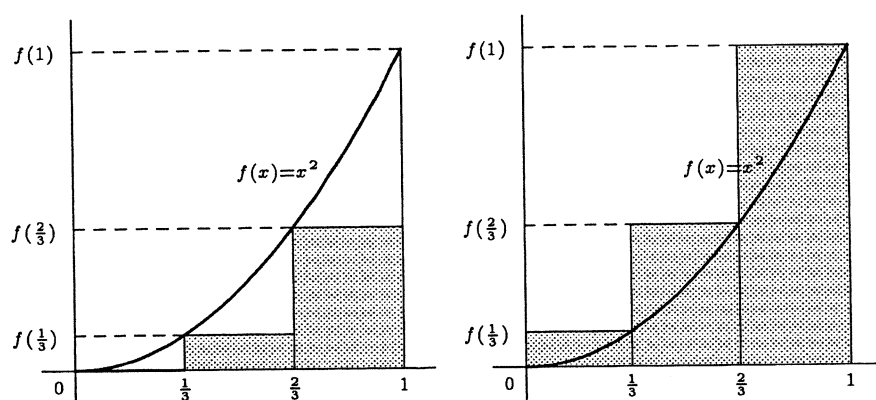
Als onderafschatting voor de oppervlakte van het gebied nemen we nu de totale oppervlakte van de drie ingeschreven rechthoeken. Deze is

$$\frac{1}{3} \cdot f(0) + \frac{1}{3} \cdot f\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3} \cdot f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3}\left(0 + \frac{1}{9} + \frac{4}{9}\right) = \frac{5}{27}.$$

Evenzo vinden we voor de bovenschatting

$$\frac{1}{3} \cdot f\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3} \cdot f\left(\frac{2}{3}\right) + \frac{1}{3} \cdot f(1) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{9} + \frac{4}{9} + 1\right) = \frac{14}{27}.$$

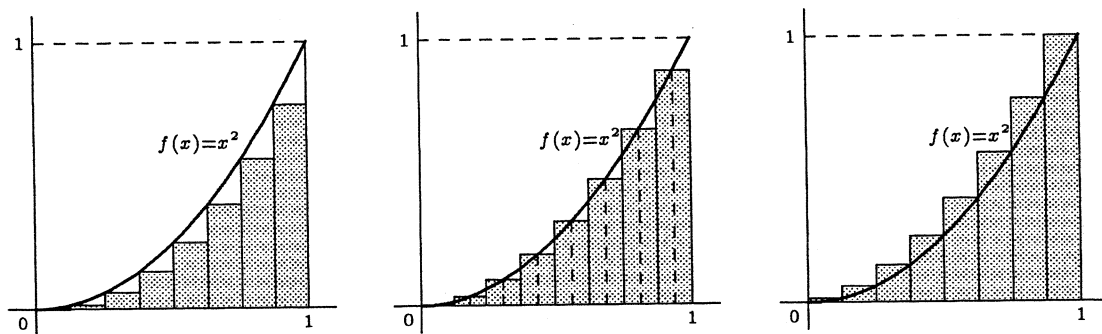
Het zal duidelijk zijn dat deze schattingen niet erg nauwkeurig zijn. We kunnen tot betere



**FIGUUR 5.2:** Een onder- en bovenschatting voor de oppervlakte

benaderingen van de oppervlakte komen als we het interval  $[0, 1]$  in meer deelintervallen opdelen. Bovendien hoeven we niet per se onder- of bovenschattingen te geven. We kunnen de rechthoeken een hoogte geven die overeenkomt met de functiewaarde in een

zelf gekozen tussenpunt van het betreffende interval. In het geval van onderschattingen is dit “tussenpunt” gelijk gekozen aan de  $x$ -coördinaat van het minimum van de functie op dit interval, en in het geval van bovenschattingen aan de  $x$ -coördinaat van het maximum. Merk op dat het tussenpunt dan op de rand van zijn bijbehorende interval kan liggen. In figuur 5.3 hebben we de tussenpunten op drie verschillende manieren gekozen. De linker figuur geeft de onderschatting (de tussenpunten zijn in dit geval de linkerpunten van de deelintervallen). Bij de middelste figuur hebben we de tussenpunten in de middens van de (deel)intervallen gekozen en de rechterfiguur geeft de bovenschatting (waar liggen de tussenpunten nu?). Van de drie schattingen geeft de middelste waarschijnlijk de beste benadering van de werkelijke oppervlakte. We zullen het eens uitrekenen. We verklappen alvast dat de echte oppervlakte  $\frac{1}{3}$  is (dit wordt straks bewezen). In de figuur is het interval



FIGUUR 5.3: Oppervlakteschattingen

$[0, 1]$  in 8 intervallen met een lengte van  $\frac{1}{8}$  verdeeld. Als onderschatting krijgen we

$$\frac{1}{8} \cdot f(0) + \frac{1}{8} \cdot f\left(\frac{1}{8}\right) + \frac{1}{8} \cdot f\left(\frac{2}{8}\right) + \cdots + \frac{1}{8} \cdot f\left(\frac{7}{8}\right) = \frac{1}{8} \left(0 + \frac{1}{64} + \frac{4}{64} + \cdots + \frac{49}{64}\right) = \frac{35}{128} \approx 0.273.$$

De oppervlakte van het gearceerde deel in de middelste figuur is

$$\frac{1}{8} \cdot f\left(\frac{1}{16}\right) + \frac{1}{8} \cdot f\left(\frac{3}{16}\right) + \frac{1}{8} \cdot f\left(\frac{5}{16}\right) + \cdots + \frac{1}{8} \cdot f\left(\frac{15}{16}\right) = \frac{85}{256} \approx 0.332,$$

terwijl een bovenschatting gelijk is aan

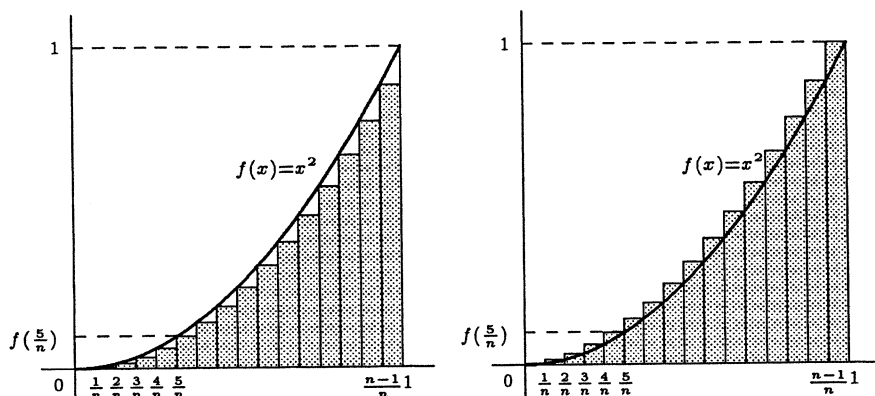
$$\frac{1}{8} \cdot f\left(\frac{1}{8}\right) + \frac{1}{8} \cdot f\left(\frac{2}{8}\right) + \cdots + \frac{1}{8} \cdot f(1) = \frac{1}{8} \left(\frac{1}{64} + \frac{4}{64} + \cdots + \frac{49}{64} + 1\right) = \frac{51}{128} \approx 0.398.$$

Inderdaad, de middelste schatting is de beste.

We gaan nu proberen de oppervlakte echt te berekenen. Iedereen voelt natuurlijk aan dat de benaderingen beter worden als we steeds meer en smallere rechthoekjes plaatsen. Met andere woorden, als we het interval in steeds smallere deelintervallen verdelen. In feite zal de oppervlakte dus een limiet worden van een rij benaderingen.

Wij zullen het interval  $[0, 1]$  verdelen in  $n$  even lange deelintervallen, waarbij  $n$  een positief geheel getal is. De lengte van elk van deze intervallen is dan  $\frac{1}{n}$ . We bepalen eerst de bijbehorende onderschatting. Merk daartoe op dat de hoogte van een rechthoek behorend bij het deelinterval  $\left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]$  gelijk is aan  $f\left(\frac{i-1}{n}\right)$  (zie figuur 5.4). De onderschatting bij deze verdeling is dus

$$\frac{1}{n} \cdot f(0) + \frac{1}{n} \cdot f\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} \cdot f\left(\frac{2}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{n} \cdot f\left(\frac{n-1}{n}\right) =$$



FIGUUR 5.4: Oppervlakteschattingen middels een verdeling in  $n$  intervallen

$$\frac{1}{n} \left( 0 + \frac{1}{n^2} + \frac{4}{n^2} + \dots + \frac{(n-1)^2}{n^2} \right) = \frac{1}{n^3} (0 + 1 + 4 + \dots + (n-1)^2).$$

De bovenafschatting vinden we op dezelfde manier en is

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \cdot f\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} \cdot f\left(\frac{2}{n}\right) + \dots + \frac{1}{n} \cdot f\left(\frac{n-1}{n}\right) + \frac{1}{n} \cdot f(1) = \\ \frac{1}{n} \left( \frac{1}{n^2} + \frac{4}{n^2} + \dots + \frac{(n-1)^2}{n^2} + 1 \right) = \frac{1}{n^3} (1 + 4 + \dots + (n-1)^2 + n^2). \end{aligned}$$

Als we nu definiëren  $S_n = 1 + 4 + \dots + n^2$  dan geldt  $S_{n+1} - S_n = (n+1)^2$  en  $S_1 = 1$ . Dus  $S_n$  kan worden beschouwd als een oplossing van een eerste-orde lineaire differentievergelijking. Als we deze differentievergelijking met beginvoorwaarde  $S_1 = 1$  oplossen krijgen we  $S_n = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$  als oplossing (zie §3.4.4 opgave 44). We passen dit toe op de formules van de onder- en bovenafschatting en krijgen dan

$$\frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2}$$

voor de onderafschatting en

$$\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}$$

voor de bovenafschatting. Er geldt nu

$$\frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2} \leq \text{oppervlakte} \leq \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}.$$

Omdat

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} = \frac{1}{3}$$

is het volgens de insluitstelling redelijk te veronderstellen dat de oppervlakte van het gebied gelijk is aan  $\frac{1}{3}$ .

We merken nog op dat het niet per se noodzakelijk is het interval  $[0, 1]$  in gelijke stukken te verdelen. Wij hebben dit gedaan omdat we daarmee in staat waren om de limieten van de onder- en bovenschattingen te berekenen middels een formule voor  $1^2 + 2^2 + \dots + n^2$ .

Het enige wat in feite nodig is om de oppervlakte steeds beter te benaderen, is dat het aantal deelpunten steeds groter wordt, terwijl tegelijkertijd de lengten van de deelintervallen naar 0 gaan. Bij elke keuze van tussenpunten zal de limiet van deze benaderingen gelijk moeten zijn aan de oppervlakte van de figuur.

### 5.1.2 De definitie

Bij de oplossing van het “oppervlakte probleem” uit §5.1.1 hebben we een oppervlakte berekend, door deze steeds beter te benaderen met rechthoeken. De technieken die we daar gebruikt hebben, willen we nu toepassen op een willekeurige *begrensde* functie (niet per se continu!) met een *gesloten en begrensd* interval als domein en zullen leiden tot de definitie van de “bepaalde integraal”. Ofschoon het intuïtieve idee volstrekt duidelijk is, is de wiskundige formulering lastig. De begrensde functie noemen we  $f$  en het domein  $[a, b]$ . We beginnen met de verdeling van het interval.

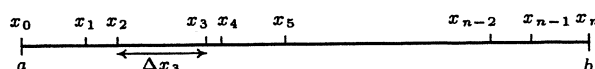
Een *partitie* van een interval  $[a, b]$  is een verzameling getallen

$$P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n\}$$

zo dat  $x_0 = a$ ,  $x_n = b$  en

$$x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n.$$

Door  $P$  wordt het interval  $[a, b]$  in  $n$  *deelintervallen* verdeeld, namelijk de intervallen  $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]$  (zie figuur 5.5). Merk op dat het  $i$ -de interval  $[x_{i-1}, x_i]$  is. De *lengte*  $\Delta x_i$  van een deelinterval  $[x_{i-1}, x_i]$  behorende bij een partitie  $P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$  wordt gegeven door  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ . De *maaswijdte*  $|P|$  van een partitie  $P$  definiëren we als de lengte van het langste deelinterval uit de partitie.



FIGUUR 5.5: Een partitie van het interval  $[a, b]$

**Voorbeeld 5.1.1:**  $P = \{0, 1, 2, 4, 7, 8\}$  is een partitie van  $[0, 8]$  waarbij de deelpunten  $x_0, x_1, x_2, x_3, x_4$  en  $x_5$  respectievelijk worden gegeven door 0, 1, 2, 4, 7 en 8. Het interval  $[0, 8]$  wordt door  $P$  in 5 deelintervallen (van ongelijke lengte) verdeeld. De lengte van het langste deelinterval is 3, zodat de maaswijdte  $|P|$  van deze partitie gelijk is aan 3. —

**Voorbeeld 5.1.2:** Als we het interval  $[0, 1]$  in  $n$  gelijke delen verdelen, dan wordt de bijbehorende partitie  $P$  gegeven door  $P = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1\}$  en de maaswijdte door  $|P| = \frac{1}{n}$ .

Als we het interval  $[a, b]$  in  $n$  gelijke delen verdelen, dan is de bijbehorende partitie

$$P = \left\{ a, a + \frac{b-a}{n}, a + 2 \cdot \frac{b-a}{n}, \dots, a + (n-1) \cdot \frac{b-a}{n}, b \right\}$$

en  $|P| = \frac{b-a}{n}$ . —

Om straks de hoogte van de rechthoeken te kunnen bepalen, moeten we in elk deelinterval van de partitie één *tussenvpunt* kiezen (eventueel aan de rand). Zo'n keuze van tussenvpunten noemen we een *strooiing bij de partitie*  $P$  en geven we aan met de letter  $S$ . De tussenvpunten

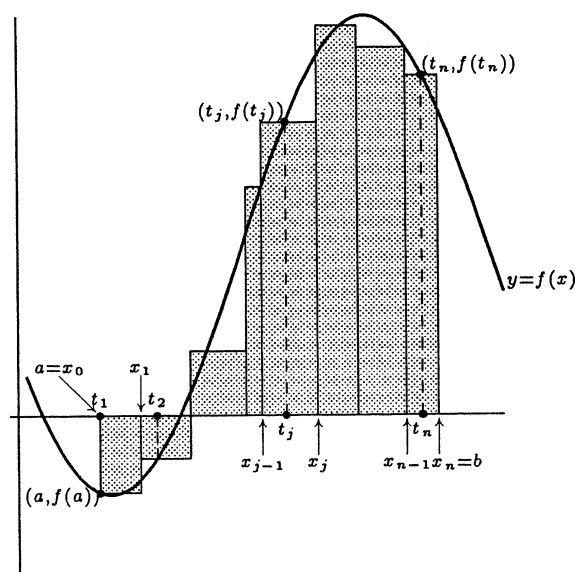
zelf worden daarom ook wel *stroompunten* genoemd. Als  $P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n\}$  dan geven we het stroompunt uit het  $j$ -de interval  $[x_{j-1}, x_j]$  dus) aan met  $t_j$  waarbij  $j = 1, 2, \dots, n-1, n$ .

**Voorbeeld 5.1.3:** Bij de behandeling van het oppervlakte probleem uit §5.1.1 werd bij de onderschattingen de strooming  $S$  gedefinieerd door  $t_j = x_{j-1}$ , d.w.z. het beginpunt van elk deelinterval, en bij de bovenafschattingen werd  $t_j = x_j$  genomen (dus het eindpunt van elk deelinterval). Wat waren  $P$  en  $S$  in het middelste plaatje van figuur 5.3?<sup>1</sup> —■

We gaan nu de functie  $f$  in de beschouwingen betrekken. Daartoe nemen we eerst aan dat we op  $[a, b]$  een partitie  $P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n\}$  met een strooming  $S = \{t_1, t_2, \dots, t_{n-1}, t_n\}$  hebben. Bij elk deelinterval  $[x_{j-1}, x_j]$  stellen we het produkt

$$f(t_j)(x_j - x_{j-1}) = f(t_j)\Delta x_j$$

op. De eerste factor van dit produkt is de waarde van de functie in  $x = t_j$ . De tweede factor is de lengte van het deelinterval  $[x_{j-1}, x_j]$ . Het produkt is een getal dat op teken na de oppervlakte voorstelt van de rechthoek waarvan de breedte gegeven wordt door  $\Delta x_j$  en de hoogte door  $|f(t_j)|$  (zie figuur 5.6).



**FIGUUR 5.6:** Riemann-sommen

Nu tellen we al deze produkten op. De som wordt gegeven door

$$f(t_1)\Delta x_1 + f(t_2)\Delta x_2 + \dots + f(t_n)\Delta x_n.$$

M.b.v. het sommatie-teken  $\sum$  kunnen we dit schrijven als

$$\sum_{j=1}^n f(t_j)(x_j - x_{j-1}).$$

<sup>1</sup>Antwoord:  $P = \{0, 1/8, 2/8, \dots, 7/8, 1\}$  en  $S = \{1/16, 3/16, \dots, 15/16\}$ .



Zo'n som noemen we de *Riemann-som van  $f$  bij de partitie  $P$  en de strooiing  $S$* . Deze Riemann-som zal de oppervlakte onder de grafiek van  $f$  benaderen als  $f$  een positieve functie is. Waarom geldt dat niet voor functies die ook negatieve waarden aannemen?

**Voorbeeld 5.1.4:** We bekijken nog eens de functie  $f(x) = x^2$  gedefinieerd op het interval  $[a, b] = [0, 1]$ . We kiezen  $P = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1\}$  en als strooipunten kiezen we  $t_1 = 0$ ,  $t_2 = \frac{1}{n}, \dots, t_n = \frac{n-1}{n}$ . Dan

$$\sum_{j=1}^n f(t_j) \Delta x_j = \sum_{j=1}^n \left(\frac{j-1}{n}\right)^2 \frac{1}{n} = 0 + \frac{1}{n^3} + \frac{4}{n^3} + \dots + \frac{(n-1)^2}{n^3}.$$

We zien dat de onderschatting die we in §5.1.1 gevonden hebben, een Riemann-som is. —

We zijn nu toe aan de definitie van de bepaalde integraal. Uit de voorgaande paragraaf weten we al dat een limietproces een rol zal spelen. We merken nog op dat de Riemann-sommen afhangen van de begrensde functie  $f$ , het gesloten en begrensde interval  $[a, b]$ , de partitie  $P$ , en de strooiing  $S$ . De functie  $f$  en het interval  $[a, b]$  zijn van tevoren opgegeven, maar voor  $P$  en  $S$  hebben we vele keuzemogelijkheden. We laten nu  $P$  variëren zodanig dat z'n maaswijdte  $|P|$  naar 0 gaat. Als de bijbehorende Riemann-sommen

$$\sum_{j=1}^n f(t_j) \Delta x_j$$

naderen naar een limiet  $L$ , ongeacht de keuze van de punten  $t_j$ , heet de functie  $f$  *integreerbaar* op  $[a, b]$ . De limiet  $L$  heet de (*bepaalde*) *integraal van  $f$  van  $a$  naar  $b$* . We noteren  $L$  in het vervolg als

$$\int_a^b f(x) dx.$$

We merken op dat hierboven een informele definitie staat van het begrip “bepaalde integraal”. Een preciezere definiëring zou een betekenis moeten geven van “naderen naar een limiet  $L$ ”. Dit gaat op de manier van de definitie van de limiet van rijen. We zien van deze precieze definitie af. Ook, vanwege de vele keuze mogelijkheden van  $P$  en  $S$  is het twijfelachtig of zo'n limiet wel bestaat. Een diepe en belangrijke stelling (die we niet zullen bewijzen) in dit verband zegt dat deze limiet in ieder geval wel bestaat als de functie continu is:

**STELLING 5.1.1** *Elke continue functie is integreerbaar. Preciezer: als  $f$  continu is op een interval  $[a, b]$ , dan bestaat  $\int_a^b f(x) dx$ .*

**Voorbeeld 5.1.5:** We beschouwen opnieuw de functie  $f(x) = x^2$  op  $[0, 1]$ . We hebben gezien dat de Riemann-sommen

$$\sum_{j=1}^n \left(\frac{j-1}{n}\right)^2 \frac{1}{n}$$

naar  $\frac{1}{3}$  convergeren als  $n \rightarrow \infty$ . Omdat de functie continu is, volgt met de stelling dat

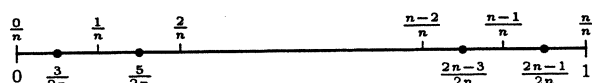
$$\int_a^b f(x) dx = \int_0^1 x^2 dx$$

bestaat. Deze integraal moet dus gelijk zijn aan  $\frac{1}{3}$ .

Beschouw nu de partitie  $P = \{0, \frac{1}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1\}$  en de strooiing  $S = \{\frac{1}{2n}, \frac{3}{2n}, \dots, \frac{2n-1}{n}\}$  van het interval  $[0, 1]$  (zie figuur 5.7). Nu is

$$\sum_{j=1}^n f(t_j) \Delta x_j = \sum_{j=1}^n \frac{(2j-1)^2}{4n^3}$$

de Riemann-som van  $f$  behorende bij  $P$  en  $S$ . Als we  $n$  laten toenemen, krijgen we partities



FIGUUR 5.7: Een partitie en strooiing van  $[0, 1]$

waarvan de maaswijdte naar nul gaat, waaruit volgt dat de bijbehorende Riemann-sommen naar de integraalwaarde  $\frac{1}{3}$  toe gaan, dus

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \frac{(2j-1)^2}{4n^3} = \frac{1}{3}.$$

Integralen kunnen op deze manier een rol spelen bij het bepalen van limieten van sommen.

**Opmerking 1:** Het is zinvol om na te denken over het feit of functies al dan niet integreerbaar zijn. Bovenstaande stelling zegt dat continue functies integreerbaar zijn. Men kan bewijzen dat (begrensde) functies (op een gesloten en begrensd interval  $[a, b]$ ) met eindig veel discontinuïteiten nog altijd integreerbaar zijn, evenals stijgende of dalende functies. Dit betekent dat zeer veel functies integreerbaar zijn. Toch bestaan er functies (niet stijgend of dalend en met oneindig veel discontinuïteiten) die niet integreerbaar zijn! Omdat wij met name geïnteresseerd zijn in continue functies, zullen we hier verder niet ingaan.

**Opmerking 2:** Nog even wat over notatie en terminologie. De notatie

$$\int_a^b f(x) dx$$

is afkomstig van Leibniz. Het *integraalteken*  $\int$  is eigenlijk een langgerekte  $S$ , de eerste letter van het woord “som”. Verder wordt  $dx$  gebruikt voor een “zeer kleine” ofwel “naar nul genaderde” lengte  $\Delta x$ . Het feit dat de integraal een limiet is van Riemann-sommen

$$\sum_{j=1}^n f(t_j) \Delta x_j,$$

verklaart de notatie van Leibniz.

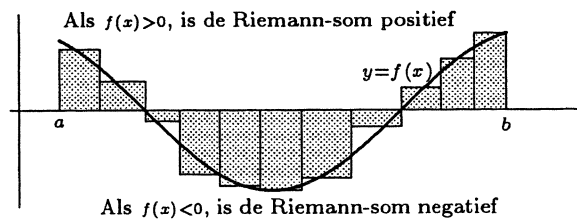
Het interval  $[a, b]$  wordt ook wel het *integratie-interval* genoemd, en de functie  $f$  de *integrand*. Verder heet  $a$  de *ondergrens* en  $b$  de *bovengrens* van de integraal. De *integratievariabele* is  $x$  en mag vervangen worden door elke andere, niet met een betekenis belaste letter:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(u) du = \dots$$

We merken tenslotte nog op dat de uitkomst van een bepaalde integraal met vaste grenzen altijd een getal is, en dus onafhankelijk van de variabele.

We hebben gezien dat de integraal van een positieve functie op  $[a, b]$  de oppervlakte voorstelt van het gebied ingesloten door de  $x$ -as, de grafiek van de functie en de lijnen  $x = a$  en  $x = b$ . We vragen ons even af wat er aan de hand is als  $f$  negatief is of zowel positieve als negatieve waarden aanneemt. Welnu, in de situatie dat  $f$  negatief is, is elke Riemann-som de som van de oppervlakten van een aantal rechthoeken, voorzien van een min-teken. De integraal stelt in dat geval dus een soortgelijke oppervlakte voor, maar nu voorzien van een min-teken.

Als  $f$  zowel positieve als negatieve waarden aanneemt, kunnen we door handige keuzen van de partities laten zien dat de integraal in dat geval het verschil is van de oppervlakte van het positieve deel en de oppervlakte van het negatieve deel (zie figuur 5.8).



**FIGUUR 5.8:** De integraal van een functie die zowel positief als negatief wordt

**Voorbeeld 5.1.6:** De oppervlakte van het gebied ingesloten door de  $x$ -as en de grafiek van de functie  $f(x) = x^2 - 1$  is

$$-\int_{-1}^1 (x^2 - 1) dx,$$

omdat het gebied onder de  $x$ -as ligt. —

**Voorbeeld 5.1.7:** Er volgt dat

$$\int_0^{2\pi} \sin x dx = 0,$$

omdat de grafiek symmetrisch is t.o.v. het punt  $(\pi, 0)$ . —

### OPGAVEN (bij §5.1)

d/ 1. Gegeven is de functie  $f(x) = 4x + 3$  met als domein het interval  $[-2, 2]$ . De partitie  $P$  wordt gegeven door  $P = \{-2, -1, 0, \frac{1}{2}, 2\}$ . Kies de tussenpunten in de middens van de deelintervallen.

- (a) Wat is  $|P|$ ?  
 (b) Wat zijn de waarden van de tussenpunten?.  
 (c) Bepaal de bijbehorende Riemannsom.

t 2. Zij  $m \in \mathbb{R}$  en  $[a, b]$  een interval. Bewijs dat  $\int_a^b m \, dx = m(b - a)$ . (*Hint*: Laat zien dat een willekeurige Riemann-som gelijk is aan  $m(b - a)$ .)

t 3. Gegeven zijn de functie  $f(x) = x$  met domein  $[0, 1]$  en de partitie  $P = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1\}$ . Als tussenpunten nemen we de linker-eindpunten van de deelintervallen.

- (a) Stel de bijbehorende Riemann-som op, d.w.z. bepaal  $\sum_{j=1}^n f(t_j)(x_j - x_{j-1})$ .  
 (b) Bereken  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n f(t_j)(x_j - x_{j-1})$ .  
 (c) Volgens welke stelling bestaat  $\int_0^1 f(x) \, dx$ ?  
 (d) Bepaal  $\int_0^1 f(x) \, dx$ .

t 4. Gegeven is de (niet continue) functie  $f$  waarvoor geldt

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{als } x = 3 \\ 0 & \text{als } x \neq 3 \end{cases}$$

Toon aan dat  $f$  integreerbaar is op  $[-1, 5]$  en dat  $\int_{-1}^5 f(x) \, dx = 0$ .

h 5. Schrijf de volgende limieten als integraal:

- (a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left( \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 + \left(1 + \frac{2}{n}\right)^2 + \dots + \left(1 + \frac{n}{n}\right)^2 \right)$ ;  
 (b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} \left( \sin \frac{2n+1}{n} + \sin \frac{2n+3}{n} + \dots + \sin \frac{4n-1}{n} \right)$ ;  
 (c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} 2 \left( \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+3} + \dots + \frac{1}{4n-1} \right)$ ;  
 (d)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^4} (1 + 2^3 + 3^3 + \dots + (n-1)^3)$ .

t 6. (a) Geef een meetkundige interpretatie van  $2 \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} \, dx$ .

- (b) Omdat we nog geen technieken in huis hebben om deze integraal te berekenen, doen we dit als volgt: Laat eerst zien dat de oppervlakte van een ingeschreven regelmatige  $n$ -hoek (in een cirkel met straal  $r$ ) gelijk is aan  $A_n = \frac{nr^2}{2} \sin \frac{2\pi}{n}$ . Bepaal vervolgens de limiet van  $A_n$  voor  $n \rightarrow \infty$ . Dit is (intuïtief gezien) de waarde van de bepaalde integraal uit onderdeel (a).

## 5.2 Eigenschappen van de integraal

In deze paragraaf zullen we enige veelgebruikte eigenschappen van bepaalde integralen formuleren. Voordat we dat echter doen breiden we de definitie van de integraal nog wat uit. Er zijn namelijk gevallen die door de definitie niet gedekt worden, maar waarvoor we wel over de integraal willen spreken. Deze zijn

$$\int_a^a f(x) dx = 0,$$

en (voor  $a > b$ )

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx.$$

De eerste eigenschap die we geven is de volgende stelling, die intuïtief duidelijk is en die we in de vorige paragraaf eigenlijk al genoemd hebben.

**STELLING 5.2.1** *Als  $f$  integreerbaar is op  $[a, b]$  en  $f(x) \geq 0$  op  $[a, b]$ , dan is*

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0.$$

Het bewijs van deze stelling kan gegeven worden met Riemann-sommen en volgt uit het feit dat Riemann-sommen voor positieve functies positief zijn.

De volgende stelling wordt wel de *additiviteit van de bepaalde integraal* genoemd. Als we de oppervlakte-interpretatie voor ogen houden is de regel volstrekt duidelijk. Als we het bewijs met behulp van de definitie willen geven, is dit nog tamelijk lastig.

**STELLING 5.2.2** *Als  $f$  integreerbaar is op de intervallen  $[a, c]$  en  $[c, b]$ , dan geldt*

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Verder hebben we

**STELLING 5.2.3** *Als  $f$  en  $g$  integreerbaar zijn op het interval  $[a, b]$  en als  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , dan is ook  $\alpha f + \beta g$  integreerbaar op  $[a, b]$  en*

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx.$$

Deze stellingen hebben een aantal gevolgen:

**GEVOLG 5.2.4** *Laat  $f$  en  $g$  integreerbaar zijn op  $[a, b]$ .*

1. *Als  $f(x) \leq g(x)$  voor alle  $x \in [a, b]$ , dan is*

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

2. *Als geldt dat  $m \leq f(x) \leq M$  voor elke  $x \in [a, b]$ , dan is*

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a).$$

3. *Altijd geldt*

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

**Bewijs:** Voor de eerste uitspraak merken we op dat  $g(x) - f(x) \geq 0$ . Met stelling 5.2.1 en stelling 5.2.3 volgt dan dat

$$\int_a^b g(x) dx - \int_a^b f(x) dx = \int_a^b (g(x) - f(x)) dx \geq 0.$$

Bij de tweede uitspraak nemen we aan dat  $m \leq f(x) \leq M$  voor elke  $x \in [a, b]$ . Met de eerste uitspraak volgt direct dat dan

$$\int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b M dx.$$

Het is niet moeilijk in te zien dat de linker integraal gelijk is aan  $m(b-a)$  en de rechter aan  $M(b-a)$  (zie opgave 3).

De derde uitspraak volgt uit het feit dat

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|.$$

Volgens de eerste uitspraak geldt dan

$$-\int_a^b |f(x)| dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b |f(x)| dx,$$

hetgeen betekent dat

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

□

We zijn nu geïnteresseerd in het volgende: Gegeven een op het interval  $[a, b]$  continue en positieve functie  $f$ . Wat is de hoogte van de rechthoek die dezelfde oppervlakte en dezelfde basis heeft als de oppervlakte ingesloten door de  $x$ -as, de lijnen  $x = a$  en  $x = b$ , en de grafiek van de functie  $f$ ? Het antwoord is snel te geven: De lengte van de basis van deze rechthoek is  $b - a$ , en de oppervlakte moet gelijk zijn aan  $\int_a^b f(x) dx$ . De hoogte van de rechthoek is daarom

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

Merk op dat deze waarde een soort gemiddelde van deze functie is, vandaar de volgende definitie:

**Definitie:** Als de functie  $f$  integreerbaar is op het interval  $[a, b]$ , dan noemen we het getal

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

het *gemiddelde van de functie  $f$  op het interval  $[a, b]$* .

Merk nu het volgende op: Als  $m$  het minimum is van de continue functie  $f$  op  $[a, b]$ , en  $M$  het maximum, dan is (volgens stelling 5.2.4)

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a),$$

en dus

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M.$$

Blijkbaar is het gemiddelde van de functie  $f$  op het interval  $[a, b]$  een tussenwaarde van de continue functie  $f$ . Volgens de tussenwaardestelling (zie de opmerking na stelling 1.8.1) geldt dan dat er een waarde  $c \in [a, b]$  is met  $f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ . We formuleren deze eigenschap in de volgende stelling, die bekend staat onder de naam *middelwaardestelling van de integraalrekening*.

**STELLING 5.2.5 (Middelwaardestelling van de integraalrekening)** *Als  $f$  een op het interval  $[a, b]$  continue functie is, dan bestaat er een punt  $c$  in het interval  $[a, b]$  waarvoor geldt dat  $f(c)$  gelijk is aan het gemiddelde van  $f$  op het interval  $[a, b]$ , met andere woorden*

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

### OPGAVEN (bij §5.2)

- t 7. Laat  $f$  een op het interval  $I$  integreerbare functie zijn en laat  $c_1, c_2, c_3 \in I$  zo zijn dat  $c_1 < c_2 < c_3$ . Toon aan dat

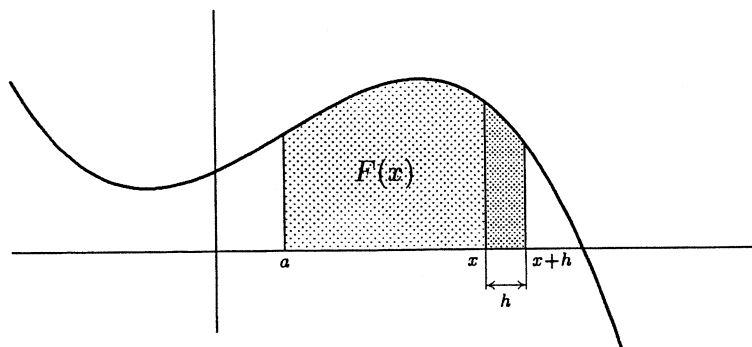
$$\int_{c_1}^{c_2} f(x) dx = \int_{c_1}^{c_3} f(x) dx + \int_{c_3}^{c_2} f(x) dx.$$

- h 8. De snelheid van een puntmassa op tijdstip  $t$  wordt gegeven door de formule  $v(t) = t^2$ , waarbij  $t \in [0, 10]$ .
- Bepaal de gemiddelde snelheid van  $v(t)$  op  $[0, 10]$ .
  - Geef de bijbehorende plaatsfunctie  $s(t)$  als  $s(0) = 0$ .
  - Bepaal m.b.v. (b) de gemiddelde snelheid.

## 5.3 Het berekenen van een integraal

In paragraaf 5.1 hebben we de definitie van de integraal gegeven. Deze definitie sluit zeer goed aan bij de intuïtie. Vóór 1700 heeft men al oppervlaktes uitgerekend middels ideeën, waarmee men later de definitie gegeven heeft: Benader de oppervlakte met figuren waarvan we de oppervlakte kennen. Een zeer groot nadeel is dat deze methode lastig en bewerkelijk is, vaak zelfs niet uitvoerbaar.

Een grote ommekeer kwam er toen Newton en Leibniz aan het eind van de zeventiende eeuw met een zeer verrassende methode (stelling) kwamen om oppervlakten (integralen) te berekenen van gebieden ingesloten door een (continue) functie en de  $x$ -as. Deze stelling



FIGUUR 5.9: De fundamentele stelling

is uitgroeid tot één van de meest fundamentele stellingen uit de analyse en al haar toepassingen. De stelling legt een verband tussen de begrippen bepaalde integraal en afgeleide van een functie.

Voordat we aan de stelling toekomen voeren we eerst een nieuw begrip in. Hierbij nemen we aan dat  $f$  een continue functie is. We nemen een vast punt  $a$ . Bij iedere  $x$  kunnen we dan de bepaalde integraal

$$\int_a^x f(t) dt$$

opstellen (zolang  $[a, x]$  (of  $[x, a]$  als  $x < a$ ) maar binnen het domein van  $f$  ligt). Deze integraal bestaat omdat  $f$  continu is. In feite verkrijgen we zo een nieuwe functie  $F$  met als definitie

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt.$$

We noemen deze functie een *oppervlaktefunctie met startwaarde  $a$*  of een *functie van de bovengrens*.

Merk op dat de oppervlaktefunctie de volgende eigenschap heeft:

$$F(x+h) = F(x) + \int_x^{x+h} f(t) dt.$$

Dit is in te zien door de definitie van  $F$  uit te schrijven en stelling 5.2.2 te gebruiken. Intuïtief is het duidelijk met figuur 5.9. Nu volgt dat

$$F(x+h) - F(x) = \int_x^{x+h} f(t) dt \approx h \cdot f(x)$$

als we  $h$  maar klein nemen. Dit betekent dat

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} \approx f(x)$$

voor kleine  $h$ , waaruit lijkt te volgen dat

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x).$$



De afgeleide van de oppervlaktefunctie lijkt dus gelijk te zijn aan de integrand. Dit is precies de inhoud van de fundamentele stelling, welke we nu netjes formuleren en bewijzen.

**STELLING 5.3.1 (Hoofdstelling van de integraalrekening)** *Laat  $f$  een op het interval  $[a, b]$  continue functie zijn. Dan geldt het volgende: De functie  $F$ , gedefinieerd door*

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt,$$

is differentieerbaar in elk punt  $x \in [a, b]$  en  $F'(x) = f(x)$ , m.a.w.

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x).$$

**Bewijs:** Volgens de definitie van de afgeleide geldt

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}.$$

Nu is

$$F(x+h) - F(x) = \int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt = \int_x^{x+h} f(t) dt$$

en dus

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt.$$

We passen nu de middelwaardestelling van de integraalrekening (stelling 5.2.5) toe op het interval  $[x, x+h]$ . Volgens deze stelling is er een  $c \in [x, x+h]$  met

$$f(c) = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt.$$

Merk op dat  $c$  afhankelijk is van  $h$ , en dat  $c \rightarrow x$  als  $h \rightarrow 0$ . We zien nu dat

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt = \lim_{h \rightarrow 0} f(c).$$

Omdat  $c$  in  $[x, x+h]$  ligt en  $f$  continu is, is  $\lim_{h \rightarrow 0} f(c) = f(x)$ . Hieruit concluderen we dat  $F'(x) = f(x)$ .  $\square$

**Voorbeeld 5.3.1:** Als  $F(x) = \int_1^x \sin t dt$  dan volgt met de hoofdstelling dat  $F$  differentieerbaar is, en dat  $F'(x) = \sin x$ . —

We kunnen de hoofdstelling toepassen om op een stuk gemakkelijkere manier het oppervlakteprobleem uit §5.1.1 op te lossen. Dit wordt gedaan in het volgende voorbeeld dat daarmee meteen het belang van de hoofdstelling illustreert.

**Voorbeeld 5.3.2:** In het oppervlakteprobleem waar we dit hoofdstuk mee begonnen, bepaalden we eigenlijk

$$\int_0^1 x^2 dx = \int_0^1 t^2 dt.$$

We bekijken nu even de oppervlaktefunctie die hoort bij de functie  $f(x) = x^2$ :

$$F(x) = \int_0^x t^2 dt.$$

Volgens stelling 5.3.1 moet gelden dat  $F'(x) = x^2$ . Na enig nadenken zien we in dat voor  $F$  dan moet gelden:

$$F(x) = \frac{1}{3}x^3 + C,$$

waarbij  $C$  één of andere constante is. Gelukkig weten we dat

$$F(0) = \int_0^0 t^2 dt = 0,$$

zodat  $C = 0$ . Nu zijn we er:

$$\int_0^1 x^2 dx = \int_0^1 t^2 dt = F(1) = \frac{1}{3} \cdot 1^3 + C = \frac{1}{3}.$$

We zijn dus in staat gebleken het oppervlakteprobleem op een tamelijk eenvoudige manier op te lossen!!!! —

Als we de berekening uit dit voorbeeld generaliseren krijgen we de volgende (van het VWO bekende) stelling:

**STELLING 5.3.2** *Laat  $f$  een continue functie zijn op het interval  $[a, b]$  en laat  $G$  een functie zijn waarvan de afgeleide precies  $f$  is (dus  $G'(x) = f(x)$  voor elke  $x \in [a, b]$ ). Dan geldt*

$$\int_a^b f(t) dt = G(b) - G(a).$$

**Bewijs:** Laat  $F$  de bij  $f$  behorende oppervlaktefunctie zijn, dus

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt.$$

Dan is  $F'(x) = G'(x) = f(x)$  voor elke  $x \in [a, b]$ . Dat wil zeggen dat de afgeleide van de verschilfunctie  $G(x) - F(x)$  op  $[a, b]$  gelijk is aan nul. In opgave 36(b) van hoofdstuk 4 hebben we laten zien dat  $G(x) - F(x)$  dan een constante  $C$  moet zijn (we werken immers op een interval), dus  $G(x) = F(x) + C$  (of  $F(x) = G(x) - C$ ).

Nu is  $F(a) = 0$ , zodat  $G(a) = F(a) + C = C$ , waaruit volgt

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) = G(b) - C = G(b) - G(a),$$

hetgeen we wilden bewijzen.  $\square$

Voor het berekenen van integralen van een functie  $f$  is het dus van belang een functie  $G$  te vinden met de eigenschap dat  $G'(x) = f(x)$  voor alle  $x$ . Zo'n  $G$  noemen we een *primitieve van  $f$* . Het zoeken naar een primitieve noemen we *primitiveren*. Ondanks het feit dat elke continue functie integreerbaar is, kunnen we niet voor elke continue functie een gesloten formule voor de primitieve vinden. In dat geval is het berekenen van een

bepaalde integraal met deze methode onmogelijk. We zullen dan moeten terugvallen op andere trucs of op benaderingen. We komen hierop terug. Eerst volgen enige voorbeelden. Bij de berekeningen gebruiken we de volgende notatie:

$$G(x) \Big|_a^b = G(b) - G(a).$$

**Voorbeeld 5.3.3:** Bereken  $\int_0^\pi \sin^2 x \, dx$ .

**Aldus:** Volgens voorgaande stelling geldt dat de gevraagde integraal gelijk is aan  $G(\pi) - G(0)$ , waarbij  $G$  een primitieve van  $\sin^2 x$  is. Om zo'n primitieve te bepalen maken we gebruik van de formule  $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$ . Snel is in te zien dat  $\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x$  een primitieve van  $\frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$  is. Er volgt

$$\int_0^\pi \sin^2 x \, dx = \int_0^\pi \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) \, dx = \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x\right) \Big|_0^\pi = \frac{1}{2}\pi.$$

**Voorbeeld 5.3.4:** Bereken  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n \left(\sin^2 \frac{k\pi}{n}\right)$ .

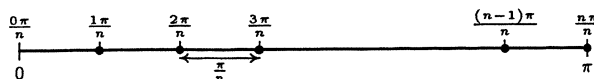
**Aldus:** Dit lijkt in eerste instantie een lastig probleem, maar na enige analyse blijkt

$$\frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n \left(\sin^2 \frac{k\pi}{n}\right)$$

een Riemann-som te zijn van de functie  $\sin^2 x$  op het interval  $[0, \pi]$ . De bij deze Riemann-som behorende partitie is  $\{0, \frac{\pi}{n}, \frac{2\pi}{n}, \dots, \pi\}$  (het interval is dus in  $n$  gelijke stukken verdeeld). Als strooiing zijn de rechtereindpunten van de deelintervallen gekozen (zie figuur 5.10). Omdat de maaswijdte naar nul gaat als  $n \rightarrow \infty$  geldt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n \left(\sin^2 \frac{k\pi}{n}\right) = \int_0^\pi \sin^2 x \, dx = \frac{1}{2}\pi$$

(zie vorige voorbeeld).



**FIGUUR 5.10:** De partitie bij voorbeeld 5.3.4

**Voorbeeld 5.3.5:** Bepaal de afgeleide van  $G(x) = \int_0^{x^2} e^{t^2} \, dt$ .

**Aldus:** Dit lossen we als volgt op: Stel  $g(x) = x^2$  en

$$F(x) = \int_0^x e^{t^2} \, dt.$$

Dan  $G(x) = F(g(x)) = F(x^2)$ . Met de kettingregel volgt dat

$$G'(x) = F'(g(x)) \cdot g'(x) = F'(x^2) \cdot 2x$$

Omdat de hoofdstelling zegt dat  $F'(x) = e^{x^2}$  vinden we

$$G'(x) = 2xF'(x^2) = 2xe^{x^2}.$$

**Voorbeeld 5.3.6:** Bereken de gemiddelde waarde van de functie  $f(x) = x^2$  op het interval  $[0, 10]$ .

**Aldus:** De gevraagde waarde is

$$\frac{1}{10-0} \int_0^{10} x^2 dx.$$

Nu is  $G(x) = \frac{1}{3}x^3$  een primitieve van  $x^2$ , dus

$$\frac{1}{10-0} \int_0^{10} x^2 dx = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{3}x^3 \Big|_0^{10} = \frac{1}{30} \cdot 1000 = \frac{100}{3} = 33\frac{1}{3}.$$

**Voorbeeld 5.3.7:** Bereken de oppervlakte van het vlakdeel ingesloten door de grafiek van  $\cos x$  en de  $x$ -as als  $0 \leq x \leq \frac{3}{2}\pi$ .

**Aldus:** We moeten deze oppervlakte in twee stappen berekenen, namelijk de oppervlakte van het gedeelte boven de  $x$ -as, en de oppervlakte van het gedeelte onder de  $x$ -as. [Waarom?] De nulpunten van de functie  $\cos x$  op het interval  $[0, \frac{3}{2}\pi]$  zijn  $\frac{1}{2}\pi$  en  $\frac{3}{2}\pi$ .

De oppervlakte van het gedeelte boven de  $x$ -as is

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos x dx = \sin x \Big|_0^{\frac{1}{2}\pi} = 1,$$

terwijl de oppervlakte van het gedeelte onder de  $x$ -as gelijk is aan

$$-\int_{\frac{1}{2}\pi}^{\frac{3}{2}\pi} \cos x dx = -\sin x \Big|_{\frac{1}{2}\pi}^{\frac{3}{2}\pi} = 2.$$

De gevraagde oppervlakte is dus 3.

### OPGAVEN (bij §5.3)

d 9. Bereken de volgende bepaalde integralen:

(a)  $\int_0^{\pi} (1 + \cos x) dx;$

(b)  $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{x^2 + \sqrt{x}}{x^2} dx;$

(c)  $\int_0^{\pi} \frac{1}{2}(\cos x + |\cos x|) dx.$

- d 10. Bepaal de oppervlakte van het gebied ingesloten door de  $y$ -as, de lijn  $y = x$  en de grafiek van de functie  $f(x) = -x^2 + 2$  met  $x \geq 0$ .
- d 11. (a) Stel  $\int_1^x f(t) dt = x^2 - 2x + 1$ . Bepaal  $f(x)$ .  
 (b) Bepaal  $f(4)$  als  $\int_0^x f(t) dt = x \cos \pi x$ .
- h 12. Bepaal  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \int_0^x \frac{t^2}{t^4 + 1} dt$ .
- h 13. De functie  $f$  is gedefinieerd door  $f(x) = 2 \int_0^x \frac{10}{1+t^4} dt$ . Bepaal de eerste en tweede orde Taylorpolynomen van  $f$  rond  $x = 0$ .
- h 14. Differentieer  $f(x) = \int_0^{\sin x} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$  voor  $|x| < \frac{\pi}{2}$ .
- t 15. Gegeven een parabool met basis  $a$  en hoogte  $h$ . Laat zien dat de oppervlakte gegeven wordt door  $\frac{2}{3}ha$ . [Deze formule werd ongeveer 250 jaar voor Christus door Archimedes ontdekt.]
- t 16. (a) Laat  $f$  een continue functie zijn. Schrijf  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left( f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \dots + f\left(\frac{n}{n}\right) \right)$  als een bepaalde integraal.  
 Gebruik dit resultaat om de volgende limieten te berekenen.  
 (b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} (2 + 4 + 6 + \dots + 2n)$ .  
 (c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left( \sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \dots + \sin \frac{n\pi}{n} \right)$ .
- h 17. Gegeven de functie  $f(x) = A \sin \omega t$  met  $t \in [0, \frac{2\pi}{\omega}]$ .  
 (a) Bepaal het gemiddelde van  $|f(x)|$  op  $[0, \frac{2\pi}{\omega}]$ .  
 (b) Bepaal de, in absolute zin, maximale spanning van het electriciteitsnet als de gemiddelde spanning 220V bedraagt.

## 5.4 Primitiveren

In de vorige paragraaf hebben we laten zien dat we voor het berekenen van integralen een primitieve van de integrand moeten bepalen. Het *primitiveren* (dat is het bepalen van *alle* primitieven van een gegeven functie) is eigenlijk het omgekeerde van differentiëren. Het probleem is dat primitiveren veel lastiger is dan differentiëren. In deze paragraaf zullen we enige technieken geven, waarmee we primitieven van een hoop functies kunnen bepalen. Door de ontwikkelingen van de laatste jaren is het niet meer noodzakelijk om veel van deze technieken op een hoog niveau te beheersen daar er vele software-pakketten op de markt zijn die (bijvoorbeeld in combinatie met een PC) zeer vele functies kunnen primitiveren. Een aantal van de technieken die we presenteren (zoals de substitutieregels en partieel integreren) zijn al op het VWO aan de orde geweest.

### 5.4.1 Probleemstelling

Bij het primitiveren spelen drie vragen een rol:

**Vraag 1:** Gegeven een functie, bestaat er dan een primitieve? Het antwoord op deze vraag is nee. Er zijn functies te bedenken die geen primitieve hebben. Echter, wij richten ons met name op continue functies, en de hoofdstelling van de integraalrekening zegt eigenlijk dat *elke continue functie op een interval een primitieve heeft*: De primitieve is namelijk de oppervlaktefunctie en deze bestaat omdat het in dat geval de integraal van een continue functie is.

**Vraag 2:** Kunnen we, behalve de formule voor de oppervlaktefunctie, bij elke continue functie een formule voor een primitieve geven, waarin alleen standaardfuncties voorkomen (en dus geen integraaltekens)? Dat kunnen we bijvoorbeeld wel bij de functie  $f(x) = x^2$ . Een primitieve daarvan is namelijk  $F(x) = \frac{1}{3}x^3$ . Men heeft echter bewezen dat we dat *niet* bij iedere continue functie kunnen! Voorbeelden daarvan zijn de functies  $f(x) = \sin(x^4)$  en  $g(x) = e^{-x^2}$ .

Als zo'n primitieve wel in gesloten vorm gegeven kan worden, is nog niet direct duidelijk hoe dat moet. We zijn aangewezen op kennis van velerlei technieken, standaardprimitieven, en het verband hiervan met de gegeven functie. We zullen in wat volgt een klein tipje van de sluier oplichten.

**Vraag 3:** Hoeveel primitieven heeft een continue functie? Het is meteen duidelijk dat als  $F$  een primitieve is, ook de functie  $G(x) = F(x) + c$  ( $c \in \mathbb{R}$ ) een primitieve is. Als we op een interval werken zijn dit meteen alle primitieven. Dit volgt uit opgave 36(b) van hoofdstuk 4: Als namelijk zowel  $F$  als  $G$  een primitieve is, dan is  $(F - G)'(x) = 0$  voor alle  $x$ . Als het domein een interval is, zegt de genoemde opgave dat  $F - G$  dan een constante functie is, dus  $F(x) - G(x) = c$  voor iedere  $x$  uit het interval. Hieruit volgt dat  $G(x) = F(x) + c$ . Als het domein uit meerdere losse intervallen bestaat, kan er per interval een andere constante voorkomen. Zo is bijvoorbeeld de functie

$$F(x) = \begin{cases} \ln|x| - 3 & \text{als } x > 0 \\ \ln|x| + 5 & \text{als } x < 0 \end{cases}$$

een primitieve van de functie  $f(x) = \frac{1}{x}$  met domein  $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ .

Tenslotte nog iets over notatie: Een willekeurige primitieve van de functie  $f$  noteren we met

$$\int f(x) dx.$$

Zo is bijvoorbeeld  $\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + c$ . Om duidelijke redenen noemen we een primitieve van een functie  $f$  ook wel een *onbepaalde integraal*.

### 5.4.2 Standaardprimitieven

In deze paragraaf geven we een lijst standaardprimitieven die grotendeels correspondeert met de lijst afgeleiden op bladzijde 127.

Standaardprimitieven			
$\int x^a dx$	$= \frac{1}{a+1} \cdot x^{a+1} + c$	voor $a \neq -1$	
$\int e^x dx$	$= e^x + c$		$\int \frac{1}{x} dx = \ln x  + c$
$\int \cos x dx$	$= \sin x + c$		$\int \sin x dx = -\cos x + c$
$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx$	$= \tan x + c$		$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + c$
$\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} dx$	$= \arccos x + c$		$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + c$
$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx$	$= \ln(x + \sqrt{x^2+1}) + c$		$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx = \ln x + \sqrt{x^2-1}  + c$

Van al deze formules is het bewijs slechts: differentieer de functie in het rechterlid en stel vast dat de uitkomst de functie is die in het linkerlid tussen  $\int$  en  $dx$  staat.

Pas echter op: Gesuggereerd lijkt te worden dat bijvoorbeeld iedere primitieve van  $1/x$  wordt verkregen uit  $\ln|x|$  door deze over een constante te verschuiven. Maar zoals we al eerder gezien hebben, de functie

$$F(x) = \begin{cases} \ln x - 3 & \text{als } x > 0 \\ \ln(-x) + 5 & \text{als } x < 0 \end{cases}$$

heeft overal de afgeleide  $1/x$ ! Dit heeft te maken met het feit dat het gestelde bij vraag 3 van de vorige paragraaf alleen geldt op intervallen. Omdat het domein van  $1/x$  uit twee intervallen bestaat, kunnen er bij de primitieve van  $1/x$  op elk interval dus verschillende constanten voorkomen.

We behandelen nu een viertal technieken die ten doel hebben een onbepaalde integraal  $\int f(x) dx$  te herleiden tot een andere onbepaalde integraal, die met behulp van bovenstaande lijst standaardprimitieven gemakkelijk is op te lossen. Deze methoden zijn: De substitutieregels, partiële integratie, breuksplitsing en de omkeerbare substitutie.

### 5.4.3 De substitutieregels

Als we  $\int h(x) dx$  willen berekenen en inzien dat  $h$  opgebouwd is als

$$h(x) = f(g(x)) \cdot g'(x),$$

terwijl bekend is wat de primitieven zijn van  $f$ , zeg

$$\int f(u) du = F(u) + c,$$

dan is

$$\int h(x) dx = F(g(x)) + c.$$

**Bewijs:**  $F(g(x))' = F'(g(x)) \cdot g'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x) = h(x)$ .  $\square$

**Voorbeeld 5.4.1:** Bepaal  $\int \frac{\ln^2 x}{x} dx$  voor  $x > 0$ .

**Aldus:** Schrijf

$$h(x) = \frac{\ln^2 x}{x} = (\ln x)^2 \cdot \frac{1}{x}.$$

Als we nu stellen dat  $g(x) = \ln x$  en  $f(x) = x^2$ , dan zien we in dat  $h(x) = f(g(x)) \cdot g'(x)$ . Merk op dat  $F(x) = \frac{1}{3}x^3$  een primitieve is van  $f$ . Uit het bovenstaande volgt dat

$$\int \frac{\ln^2 x}{x} dx = \int f(g(x)) \cdot g'(x) dx = F(g(x)) + c = \frac{1}{3} \ln^3 x + c,$$

waarmee de primitieven bepaald zijn. —

Om een integraal van het type  $\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx$  te berekenen gaan we, ten behoeve van de eenvoud, vaak als volgt te werk: substitueer  $u = g(x)$ . Dan schrijven we  $du = g'(x) dx$ , waardoor de integraal overgaat in  $\int f(u) du$ , die we kunnen berekenen. Pas nu op de uitkomst "terugsubstitutie" toe door  $u$  te vervangen door  $g(x)$ .

**Voorbeeld 5.4.2:** Het bovenstaande voorbeeld kunnen we dan als volgt uitschrijven:

$$\int \frac{\ln^2 x}{x} dx = \int (\ln x)^2 \cdot \frac{1}{x} dx = \int u^2 du = \frac{1}{3}u^3 + c = \frac{1}{3} \ln^3 x + c.$$

Hierbij hebben we  $u = \ln x$  gesubstitueerd. —

De substitutiemethode is ook toepasbaar bij de berekening van bepaalde integralen. Hierbij kan de terugsubstitutie achterwege gelaten worden als we de integratiegrenzen aanpassen:

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) du = F(u) \Big|_{g(a)}^{g(b)}.$$

We zullen nog enige voorbeelden van de substitutieregels geven. Een aantal ervan zijn, door hun eenvoud, misschien ook op te lossen zonder gebruik te maken van de substitutieregels.

**Voorbeeld 5.4.3:**  $\int_0^{\sqrt{\pi}} x \sin x^2 dx = \int_0^{\sqrt{\pi}} \frac{1}{2} \sin x^2 \cdot 2x dx$ . Substitueren van  $u = x^2$  en dus  $du = 2x dx$  geeft

$$\int_0^{\pi} \frac{1}{2} \sin u du = -\frac{1}{2} \cos u \Big|_0^{\pi} = 1. \quad \text{—}$$

**Voorbeeld 5.4.4:** Als we in de volgende integraal  $u = 1 + e^x$  substitueren krijgen we

$$\int \frac{e^x}{1 + e^x} dx = \int \frac{1}{u} du = \ln |u| + c = \ln(e^x + 1) + c.$$

[Waarom staan in het eindantwoord geen absoluutstrepen meer?] —



**Voorbeeld 5.4.5:**

$$\int_{\frac{1}{2}\pi}^{\pi} \sin^4 x \cdot \cos x \, dx = \int_{\sin \frac{1}{2}\pi}^{\sin \pi} u^4 \, du = \int_1^0 u^4 \, du = \frac{1}{5} u^5 \Big|_1^0 = -\frac{1}{5},$$

waarbij we de substitutie  $u = \sin x$  hebben toegepast. Let op de integratiegrenzen! —

**Voorbeeld 5.4.6:**

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \int \frac{1}{2} \frac{dx}{\sqrt{1-(\frac{x}{2})^2}} = \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \arcsin u + c = \arcsin \frac{x}{2} + c.$$

Hierbij is  $u = x/2$  en dus  $du = \frac{1}{2} dx$  gesubstitueerd. —

**Voorbeeld 5.4.7:** Bij de volgende integraal passen we de substitutie  $u = 1 + x^2$  en dus  $du = 2x \, dx$  toe:

$$\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \, dx = \int \frac{1}{2} \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} \, dx = \int \frac{1}{2\sqrt{u}} \, du = \sqrt{u} + c = \sqrt{1+x^2} + c.$$

Een iets kortere notatie die veel gebruikt wordt bij de substitutieregels is de volgende:

$$\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \, dx = \int \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} \, d(1+x^2) = \sqrt{1+x^2} + c.$$

**Voorbeeld 5.4.8:** Bij de volgende integraal splitsen we het kwadraat af van het polynoom onder de noemer en substitueren vervolgens  $u = 2x + 3$  (en dus  $du = 2 \, dx$ ).

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{4x^2 + 12x + 8}} \, dx &= \int \frac{1}{\sqrt{(2x+3)^2 - 1}} \, dx = \frac{1}{2} \cdot \int \frac{1}{\sqrt{u^2 - 1}} \, du \\ &= \frac{1}{2} \ln |u + \sqrt{u^2 - 1}| + c \\ &= \frac{1}{2} \ln |(2x+3) + \sqrt{4x^2 + 12x + 8}| + c. \end{aligned}$$

**Opmerking:** Onder de wortel staat bij het laatste voorbeeld een ontbindbare kwadratische vorm met positieve kopcoëfficiënt. Door kwadraatafsplitsen en substitutie konden we deze in de vorm  $u^2 - 1$  gieten. Soortgelijke situaties treden op bij de andere mogelijkheden: Een ontbindbare kwadratische vorm met negatieve kopcoëfficiënt is door kwadraatafsplitsen en substitueren om te bouwen tot de vorm  $1 - u^2$  en een onontbindbare kwadratische vorm tot  $1 + u^2$ . Bereken zelf<sup>2</sup>

$$\int \frac{1}{\sqrt{-4x^2 - 12x - 8}} \, dx \quad \text{en} \quad \int \frac{1}{\sqrt{4x^2 + 12x + 13}} \, dx.$$

<sup>2</sup> Antwoorden:  $\frac{1}{2} \arcsin(2x+3) + c$  en  $\frac{1}{2} \ln(2x+3 + \sqrt{4x^2 + 12x + 13}) + c$ .

### 5.4.4 Partiële integratie

Partiële integratie is vaak te gebruiken als we het product van twee functies willen primitiveren, waarbij van minstens één van de functies een primitieve bekend is. De methode schrijven we meestal als volgt op:

$$\int f(x) \cdot G(x) dx = F(x) \cdot G(x) - \int F(x) \cdot g(x) dx,$$

waarbij  $f$  een functie is waarvan de primitieve  $F$  bekend is en  $g$  de afgeleide is van  $G$ .

Men schrijft ook wel

$$\int G(x) dF(x) = F(x) \cdot G(x) - \int F(x) dG(x),$$

waarbij  $dF(x) = f(x) dx$  en  $dG(x) = g(x) dx$ .

**Bewijs:** Er geldt  $(F(x) \cdot G(x))' = f(x) \cdot G(x) + F(x) \cdot g(x)$ . Met andere woorden: De functie  $F(x) \cdot G(x)$  is een primitieve van het rechterlid van deze laatste uitdrukking. Dat betekent dat

$$F(x) \cdot G(x) + c = \int f(x) \cdot G(x) dx + \int F(x) \cdot g(x) dx,$$

zodat

$$\int f(x) \cdot G(x) dx = F(x) \cdot G(x) + c - \int F(x) \cdot g(x) dx,$$

Omdat links en rechts bij de integraaluitdrukkingen ook constanten optreden, kunnen we de constante  $c$  in bovenstaande uitdrukking weglaten.  $\square$

In de praktijk komt het erop neer dat de regel der partiële integratie vooral toepassing vindt bij het primitiveren van een product van twee functies die van “verschillende aard” zijn, bijvoorbeeld  $x$  en  $\sin x$ ,  $e^x$  en  $x$ ,  $\sin x$  en  $e^x$ ,  $x$  en  $\ln x$ , etc.

**Voorbeeld 5.4.9:** We schrijven  $G(x) = x$  en  $f(x) = \sin x$ , zodat  $g(x) = 1$  en  $F(x) = -\cos x$ . Invullen in bovenstaande formule geeft

$$\int x \sin x dx \stackrel{\text{p.i.}}{=} x \cdot (-\cos x) - \int 1 \cdot (-\cos x) dx = -x \cos x + \sin x + c.$$

De andere schrijfwijze geeft

$$\int x \sin x dx = \int x d(-\cos x) \stackrel{\text{p.i.}}{=} -x \cos x - \int -\cos x dx = -x \cos x + \sin x + c$$

(“p.i.” staat voor “partiële integratie”). Lukt de berekening ook als we  $f(x) = x$  en  $G(x) = \sin x$  genomen hadden? —■

**Voorbeeld 5.4.10:** Soms moeten we meer dan één keer partiële integratie toepassen:

$$\begin{aligned} \int x^2 e^x dx &\stackrel{\text{p.i.}}{=} x^2 e^x - \int 2x \cdot e^x dx \\ &\stackrel{\text{p.i.}}{=} x^2 e^x - 2\{x e^x - \int 1 \cdot e^x dx\} \\ &= (x^2 - 2x + 2) \cdot e^x + c \end{aligned}$$

**Voorbeeld 5.4.11:**

$$\int \ln x \, dx \stackrel{!}{=} \int 1 \cdot \ln x \, dx \stackrel{\text{p.i.}}{=} x \cdot \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} \, dx = x \ln x - x + c$$

**Voorbeeld 5.4.12:**

$$\begin{aligned} \int \arcsin x \, dx &\stackrel{!}{=} \int 1 \cdot \arcsin x \, dx \\ &\stackrel{\text{p.i.}}{=} x \cdot \arcsin x - \int x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx \\ &= x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + c \end{aligned}$$

De laatste integraal is berekend met de substitutieregels.

**Voorbeeld 5.4.13:** Met partiële integratie volgt

$$\int e^x \sin x \, dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x \, dx.$$

Het lijkt erop dat we zo niet veel verder komen omdat de laatste integraal net zo lastig is als de integraal waar we mee begonnen. We volharden en passen op de laatste integraal nog een keer partiële integratie toe. We krijgen dan

$$\int e^x \sin x \, dx = -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x \, dx$$

Hieruit kunnen we  $\int e^x \sin x \, dx$  oplossen, door de laatste integraal naar de andere kant van het “=”-teken te brengen! Er volgt:

$$\int e^x \sin x \, dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + c.$$

**Voorbeeld 5.4.14:** Een lastige toepassing van partiële integratie is de volgende:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(1+x^2)^2} \, dx &= \int \frac{1+x^2}{(1+x^2)^2} \, dx - \int \frac{x^2}{(1+x^2)^2} \, dx \\ &= \int \frac{1}{1+x^2} \, dx - \frac{1}{2} \int x \cdot \frac{2x}{(1+x^2)^2} \, dx \\ &\stackrel{\text{p.i.}}{=} \int \frac{1}{1+x^2} \, dx - \frac{1}{2} \left\{ \frac{-1}{1+x^2} \cdot x + \int \frac{1}{1+x^2} \, dx \right\} \\ &= \frac{1}{2} \arctan x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{1+x^2} + c \end{aligned}$$

### 5.4.5 Rationale functies

In deze paragraaf willen we laten zien hoe men de primitieve moet bepalen van een rationale functie. Een rationale functie is een functie van de vorm  $\frac{p(x)}{q(x)}$ , waarbij  $p$  en  $q$  polynomen zijn. Een belangrijk hulpmiddel hierbij is het breuksplitsen, zoals beschreven in §1.7. Om de primitieve van een rationale functie te bepalen, voert men eerst de breuksplitsing uit. Vervolgens primitiveren we de ontstane breuken en het eventueel ontstane polynoom. De breuken zijn altijd van een type beschreven in de volgende vijf voorbeelden, waarin we ook laten zien hoe deze breuken geïntegreerd moeten worden.

**Voorbeeld 5.4.15:** Het eerste type is dat met een *constante teller en een lineaire noemer*. De primitieve is dan niet moeilijk te bepalen:

$$\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln |ax+b| + c.$$

**Voorbeeld 5.4.16:** Het tweede type is dat met een *constante teller en een macht van een lineaire vorm als noemer*. Ook nu is een primitieve vrijwel direct op te schrijven (eventueel kan de substitutie  $u = ax + b$  toegepast worden):

$$\int \frac{1}{(ax+b)^k} dx = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{1-k} \cdot \frac{1}{(ax+b)^{k-1}} + c.$$

(Hierbij is  $k \geq 2$  een geheel getal.)

Het andere type breuk dat voorkomt is een *lineaire teller en een macht van een onontbindbaar tweedegraads polynoom als noemer*. We onderscheiden hierin een aantal gevallen.

**Voorbeeld 5.4.17:** Een *constante teller*. Om een primitieve te vinden, splitsen we in de noemer het kwadraat af, waarna we het geheel ombouwen, totdat we (eventueel na substitutie) kunnen inzien dat het om een arctangens gaat:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2 - x + 1} dx &= \int \frac{1}{(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} dx \\ &= \int \frac{1}{(x - \frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2} dx \\ &\stackrel{(i)}{=} \frac{4}{3} \int \frac{1}{(\frac{x-1/2}{\sqrt{3}/2})^2 + 1} dx \\ &\stackrel{(ii)}{=} \frac{4}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \int \frac{1}{u^2 + 1} du \\ &= \frac{2}{3} \sqrt{3} \arctan u + c \\ &= \frac{2}{3} \sqrt{3} \arctan \left( \frac{2x-1}{\sqrt{3}} \right) + c. \end{aligned}$$

Bij (i) hebben we teller en noemer door  $3/4 = (\sqrt{3}/2)^2$  gedeeld en bij (ii) hebben we  $u = \frac{x-1/2}{\sqrt{3}/2}$  en dus  $du = \frac{2}{\sqrt{3}} dx$  gesubstitueerd.

**Voorbeeld 5.4.18:** De teller is de afgeleide van de noemer:

$$\int \frac{2x-1}{x^2-x+1} dx = \ln|x^2-x+1| + c = \ln(x^2-x+1) + c.$$

**Voorbeeld 5.4.19:** De teller is lineair en ongelijk aan de afgeleide van de noemer. In dat geval splitsen we de teller in een gedeelte waarin de afgeleide van de noemer staat en een constante. In het volgende voorbeeld schrijven we dus

$$x-2 = \frac{1}{2}(2x-1) - \frac{3}{2}.$$

We krijgen dan:

$$\frac{x-2}{x^2-x+1} = \frac{1}{2} \frac{2x-1}{x^2-x+1} - \frac{3}{2} \frac{1}{x^2-x+1}.$$

Met de voorbeelden 3 en 4 vinden we dan

$$\int \frac{x-2}{x^2-x+1} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2-x+1) - \sqrt{3} \arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + c.$$

De oplettende lezer zal nu gemerkt hebben dat we alleen nog voor het primitiveren van iets van de vorm

$$\frac{ax+b}{(px^2+qx+r)^k},$$

waarbij  $k > 1$  een geheel getal is, geen voorbeeld gegeven hebben. Ook voor deze vormen is een algemene methode te geven. We zien hier echter van af (in voorbeeld 5.4.14 van §5.4.4 werd zo'n vorm geprimitiveerd).

In de volgende voorbeelden zullen we twee rationale functies primitiveren. We nemen de rationale functies uit de voorbeelden 1.7.1 en 1.7.2 van §1.7 en maken gebruik van de daar gevonden splitsingen.

**Voorbeeld 5.4.20:**

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(x-2)^3(x-4)} dx &= -\frac{1}{2} \int \frac{1}{(x-2)^3} dx - \frac{1}{4} \int \frac{1}{(x-2)^2} dx \\ &\quad - \frac{1}{8} \int \frac{1}{x-2} dx + \frac{1}{8} \int \frac{1}{x-4} dx \\ &= \frac{1}{4} \frac{1}{(x-2)^2} + \frac{1}{4} \frac{1}{x-2} - \frac{1}{8} \ln|x-2| + \frac{1}{8} \ln|x-4| + c \\ &= \frac{1}{4} \frac{1}{(x-2)^2} + \frac{1}{4} \frac{1}{x-2} + \frac{1}{8} \ln \left| \frac{x-4}{x-2} \right| + c. \end{aligned}$$

**Voorbeeld 5.4.21:**

$$\begin{aligned} \int \frac{x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x - 1}{x^3 + 2x^2 + 2x + 1} dx &= \int x dx - 2 \int \frac{1}{x+1} dx + \int \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx \\ &= \frac{1}{2}x^2 - 2 \ln|x+1| + \ln(x^2+x+1) + c. \end{aligned}$$

**5.4.6 Omkeerbare substituties**

In deze paragraaf laten we een substitutiemethode zien, die andersom werkt dan de bekende substitutiemethode. Bij de bekende methode willen we, door substitutie van  $u = g(x)$  een functie van de vorm

$$h(x) = f(g(x)) \cdot g'(x)$$

omzetten in een functie  $f(u)$  waarvan we de primitieve (hopelijk) kunnen uitdrukken in standaardfuncties. Bij de *omkeerbare substituties* vormen we een gegeven functie  $f(x)$  om tot een functie van de vorm  $f(g(t)) \cdot g'(t)$ , die (hopelijk) primitiveerbaar is, zeg met primitieve  $F(t)$ . Dit doen we door  $x = g(t)$  te substitueren (en dus  $dx = g'(t) dt$ ). Er geldt dan

$$\int f(x) dx = \int f(g(t)) \cdot g'(t) dt = F(t) + c.$$

Aangezien het eindantwoord een functie van  $x$  moet zijn, zullen we  $t$  moeten vervangen door een functie van  $x$ . Dit kan als  $g$  inverteerbaar is zodat we  $t = g^{-1}(x)$  kunnen substitueren. Uiteindelijk kunnen we dan concluderen dat

$$\int f(x) dx = F(g^{-1}(x)) + c.$$

De substitutie  $x = g(t)$  moet dus inverteerbaar ofwel omkeerbaar zijn, hetgeen de naam van deze methode verklaart. Merk nog op dat we primitieven altijd bepalen op een interval  $J$ . We veronderstellen dan ook dat  $g$  een inverteerbare functie is van een interval  $J_0$  op  $J$ .

Samenvattend: Te berekenen is  $\int f(x) dx$  op een interval  $J$ . Laat  $g$  een inverteerbare functie zijn van een interval  $J_0$  op  $J$ . Als dan

$$\int f(g(t)) \cdot g'(t) dt = F(t) + c$$

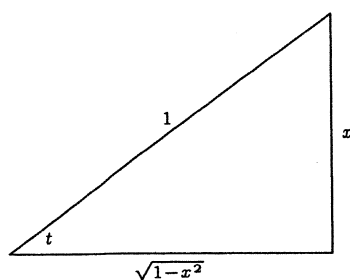
op  $J_0$ , dan is

$$\int f(x) dx = F(g^{-1}(x)) + c$$

op  $J$ .

We illustreren deze methode aan de hand van het volgende voorbeeld.

**Voorbeeld 5.4.22:** We berekenen  $\int \sqrt{1-x^2} dx$  (merk op:  $x \in [-1, 1]$ ). De “eenvoudige” substitutieregels bieden geen uitzicht en we proberen dus een omkeerbare substitutie. De substitutie die hier werkt is  $x = \sin t$ . Merk op dat deze substitutie omkeerbaar is op



FIGUUR 5.11:  $x = \sin t$  is een geschikte substitutie voor  $\sqrt{1-x^2}$

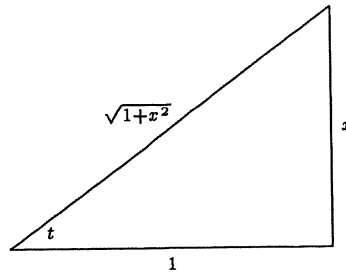
$[-\pi/2, \pi/2]$  met inverse  $t = \arcsin x$  en dat er geldt dat  $\sqrt{1-x^2} = |\cos t| = \cos t$  (omdat  $t \in [-\pi/2, \pi/2]$ ). We krijgen

$$\begin{aligned}
 \int \sqrt{1-x^2} dx &= \int \cos t d(\sin t) \\
 &= \int \cos^2 t dt \\
 &= \int \frac{1}{2}(1 + \cos 2t) dt \\
 &= \frac{1}{2}(t + \frac{1}{2} \sin 2t) + c \\
 &= \frac{1}{2}t + \frac{1}{2} \sin t \cos t + c \\
 &= \frac{1}{2} \arcsin x + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + c
 \end{aligned}$$

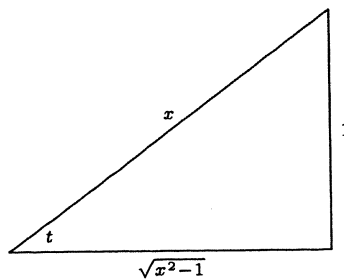
**Opmerking :** De substitutie van bovenstaand voorbeeld kan wellicht onthouden worden met figuur 5.11. Als we  $\sqrt{1-x^2}$  zien als één van de zijden van een rechthoekige driehoek, kunnen we de resterende zijden met behulp van de stelling van Pythagoras invullen. Uit de figuur blijkt dat  $\sin t = x/1 = x$  (en dus  $dx = \cos t dt$ ) en  $\cos t = \sqrt{1-x^2}$ . Hieruit volgt direct

$$\int \sqrt{1-x^2} dx = \int \cos^2 t dt.$$

Dergelijke substituties kunnen handig zijn bij het vinden van primitieven van wortelfuncties van tweedegraadspolynomen, zoals bijvoorbeeld  $\sqrt{1+x^2}$  en  $\sqrt{x^2-1}$ . Ook hier kunnen plaatjes het onthouden van de substituties vergemakkelijken: Om de primitieve van  $\sqrt{1+x^2}$  te berekenen kunnen we  $x = \tan t$  substitueren (zie figuur 5.12). Ga na dat uit de figuur volgt dat dan  $\sqrt{1+x^2} = \frac{1}{\cos t}$ . Voor  $\sqrt{x^2-1}$  substitueren we  $x = 1/\sin t$  (zie figuur 5.13). [Het is in dit geval overigens niet zo dat na bovengenoemde substituties eenvoudige integralen ontstaan!]



FIGUUR 5.12:  $x = \tan t$  is een geschikte substitutie voor  $\sqrt{1+x^2}$



FIGUUR 5.13:  $x = \frac{1}{\sin t}$  is een geschikte substitutie voor  $\sqrt{x^2-1}$

#### 5.4.7 Gebruik van een tabel

Met behulp van de voorgaande technieken kunnen we al heel wat primitieven vinden. Toch kunnen we nog niet alles aan, en bovendien zit er aan het vinden van primitieven veel werk. Zoals we al eerder vermeld hebben zijn er tegenwoordig computerprogramma's (bijvoorbeeld Maple, Mathematica en Derive) die wat betreft het vinden van primitieven fantastische resultaten geven. Toch moeten we deze programma's vaak een hint geven, bijvoorbeeld substitueer dit of dat. Daarom is kennis van de voorgaande technieken onontbeerlijk.

Een andere methode om rekenwerk te besparen is het gebruik van tabellen. Er zijn vele tabellen op de markt, variërend van 20 tot honderden "standaardprimitieven". Achterin dit dictaat staat een lijst van standaardprimitieven. Deze mogen gebruikt worden bij het berekenen van integralen. De te primitiveren functies moeten dan eerst in dusdanige vorm geschreven worden, dat we de standaardprimitieven uit de tabel hierin herkennen.

Een andere manier om primitieven te vinden is met behulp van zogenaamde *reductieformules*, die ook gegeven worden in tabellen (zie achterin het dictaat). Een reductieformule is een formule die een integraal "reducert" tot een integraal van hetzelfde type, maar dan een stapje eenvoudiger. Een voorbeeld van een reductieformule is de volgende: Als

$$I_n = \int (\ln x)^n dx$$

dan

$$I_n = x \cdot (\ln x)^n - n \cdot I_{n-1} \quad (n \neq 0).$$



Deze reductieformule kunnen we toepassen als we bijvoorbeeld  $I_3 = \int (\ln x)^3 dx$  willen berekenen:

$$\begin{aligned}
 I_3 &= x(\ln x)^3 - 3I_2 \\
 &= x(\ln x)^3 - 3(x(\ln x)^2 - 2I_1) \\
 &= x(\ln x)^3 - 3x(\ln x)^2 + 6I_1 \\
 &= x(\ln x)^3 - 3x(\ln x)^2 + 6(x \ln x - I_0) \\
 &= x(\ln x)^3 - 3x(\ln x)^2 + 6x \ln x - 6 \int dx \\
 &= x(\ln x)^3 - 3x(\ln x)^2 + 6x \ln x - 6x + c
 \end{aligned}$$

Voor de afleiding van een reductieformule, maken we gebruik van partiële integratie. In ons geval:

$$\int (\ln x)^n dx = \int 1 \cdot (\ln x)^n dx \stackrel{\text{p.i.}}{=} x(\ln x)^n - n \int x(\ln x)^{n-1} \frac{1}{x} dx = x(\ln x)^n - n \int (\ln x)^{n-1} dx.$$

We geven nu een aantal voorbeelden, waarbij we standaardprimitieven en reductieformules uit de tabel achterin dit dictaat gebruiken.

**Voorbeeld 5.4.23:** Bepaal een primitieve van  $\frac{1}{x^2 + 2x - 3}$ .

**Aldus:** Kwadraatafsplitsen en substitutie van  $y = x + 1$  geeft

$$\begin{aligned}
 \int \frac{1}{x^2 + 2x - 3} dx &= \int \frac{1}{(x+1)^2 - 4} dx = \int \frac{1}{y^2 - 4} dy \\
 &= \frac{1}{4} \ln \left| \frac{y-2}{y+2} \right| + c = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-1}{x+3} \right| + c.
 \end{aligned}$$

Hierbij hebben we gebruik gemaakt van integraal (I.1) uit de tabel. We kunnen deze primitieve ook bepalen met de behandelde technieken door  $\frac{1}{y^2-4}$  te breuksplitsen. Dit is echter veel meer werk. —

**Voorbeeld 5.4.24:** Bepaal een primitieve van  $\frac{1}{\sqrt{15+4x-4x^2}}$ .

**Aldus:** We gaan weer kwadraatafsplitsen:  $15 + 4x - 4x^2 = 16 - (2x - 1)^2$ . Substitutie van  $y = 2x - 1$  (en dus  $dx = \frac{1}{2} dy$ ) geeft dan

$$\begin{aligned}
 \int \frac{1}{\sqrt{15+4x-4x^2}} dx &= \int \frac{1}{\sqrt{16-(2x-1)^2}} dx \\
 &= \frac{1}{2} \int \frac{dy}{\sqrt{16-y^2}} \\
 &= \frac{1}{2} \arcsin \frac{y}{4} + c \\
 &= \frac{1}{2} \arcsin \frac{2x-1}{4} + c.
 \end{aligned}$$

Hierbij hebben we gebruik gemaakt van integraal (I.3) uit de tabel. —

**Voorbeeld 5.4.25:** Bij dit voorbeeld hebben we reductieformule (R.5) of (R.5') nodig. We hebben hier twee mogelijkheden. Wij kiezen voor de tweede. Doe het zelf met de eerste.

$$\begin{aligned}
 \int \sin^4 x \cos^2 x \, dx &= \frac{\sin^5 x \cos x}{6} + \frac{1}{6} \int \sin^4 x \, dx \\
 &= \frac{1}{6} \sin^5 x \cos x + \frac{1}{6} \left( -\frac{1}{4} \sin^3 x \cos x + \frac{3}{4} \int \sin^2 x \, dx \right) \\
 &= \frac{1}{6} \sin^5 x \cos x - \frac{1}{24} \sin^3 x \cos x + \frac{1}{8} \left( -\frac{1}{2} \sin x \cos x + \frac{1}{2} \int dx \right) \\
 &= \frac{1}{6} \sin^5 x \cos x - \frac{1}{24} \sin^3 x \cos x - \frac{1}{16} \sin x \cos x + \frac{1}{16} x + c
 \end{aligned}$$

Merk op dat we bij de tweede en derde stap reductieformule (R.3) gebruikt hebben. —

**Voorbeeld 5.4.26:** Bereken  $\int \frac{1}{(x^2 + 2x + 3)^2} \, dx$ .

**Aldus:** Merk op dat  $x^2 + 2x + 3 = (x + 1)^2 + 2$  (kwadraatafsplitsen). Als we  $y = x + 1$  stellen, dan

$$\begin{aligned}
 \int \frac{1}{(x^2 + 2x + 3)^2} \, dx &= \int \frac{1}{(y^2 + 2)^2} \, dy \\
 &= \frac{1}{4} \cdot \frac{y}{y^2 + 2} + \frac{1}{4} \int \frac{1}{y^2 + 2} \, dy \\
 &= \frac{y}{4(y^2 + 2)} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{y}{\sqrt{2}} + c \\
 &= \frac{x + 1}{4(x^2 + 2x + 3)} + \frac{1}{4\sqrt{2}} \arctan \frac{x + 1}{\sqrt{2}} + c.
 \end{aligned}$$

Bij de tweede stap hebben we reductieformule (R.2) gebruikt en bij de derde stap integraal (I.1). —

### OPGAVEN (bij §5.4)

d 18. Bepaal een primitieve van

- (a)  $\frac{\ln^2 x}{x}$ ;
- (b)  $\sin^4 x \cos x$ ;
- (c)  $x \cos x$ ;
- (d)  $\arctan x$ ;
- (e)  $x^3 e^{2x}$ ;
- (f)  $\sqrt[3]{4x + 1}$ .

h 19. Bepaal (zonder tabel) een primitieve van

- (a)  $\frac{1}{x \ln x \ln(\ln x)}$ ;
- (b)  $2^x$ ;
- (c)  $\sin^3 x$ ;
- (d)  $\cos^2 x$ ;
- (e)  $\tan x$ ;
- (f)  $\frac{1}{\tan x}$ ;
- (g)  $\ln^2 x$ ;
- (h)  $e^{at} \cos bt$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ );
- (i)  $\frac{1}{1 + e^x}$ .

t 20. Leid de volgende reductie formules af:

- (a)  $I_n = -\frac{1}{n} \sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n} I_{n-2}$  waarbij  $I_n = \int \sin^n x dx$ ;
- (b)  $I_n = x^n e^x - n I_{n-1}$ , waarbij  $I_n = \int x^n e^x dx$ .

h 21. Bepaal een primitieve van

- (a)  $\frac{1}{1+x^2}$ ;
- (b)  $\frac{1}{(1+x)^2}$ ;
- (c)  $\frac{x}{1+x^2}$ ;
- (d)  $\frac{x}{(1+x)^2}$ ;
- ~~(e)~~  $\frac{1}{x^2+2x+2}$ ;
- (f)  $\frac{x}{x^2+2x+2}$ ;
- (g)  $\frac{x^4}{x^2-1}$ ;
- (h)  $\frac{x^2}{1+x^6}$ ;
- (i)  $\frac{7x-4}{x^3-3x+2}$ ;
- (j)  $\frac{x+3}{(x-1)(x^2+1)^2}$ .

h 22. In deze opgave laten we zien hoe we aan de twee verschillende primitieven kunnen komen van integraal (I.9) uit de tabel.

(a) Laat zien dat

$$\int \frac{1}{\sin x} dx = \ln |\tan \frac{1}{2}x| + c,$$

door de formule  $\sin x = 2 \sin \frac{1}{2}x \cos \frac{1}{2}x$  te gebruiken;

(b) Laat zien dat

$$\int \frac{1}{\sin x} dx = \ln \left| \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} \right| + c$$

door teller en noemer met  $\sin x$  te vermenigvuldigen en vervolgens een geschikte substitutie uit te voeren.

h 23. Bepaal een primitieve van

(a)  $\frac{1}{x\sqrt{x^2-4}}$  op  $(2, \infty)$ ;

(b)  $\frac{1}{x^2\sqrt{4+x^2}}$ ;

(c)  $\frac{\sqrt{9-4x^2}}{x}$ .

h 24. Bereken de volgende integralen, na uitvoering van de aangegeven substitutie:

(a)  $\frac{\sqrt{1+x}}{x-3}$ ,  $u = \sqrt{1+x}$ ;

(b)  $\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ ,  $x = \cos \varphi$ ;

(c)  $\frac{1}{x + \sqrt[3]{x}}$ ,  $x = u^3$ ;

(d)  $\frac{1}{\sqrt{(x-1)(2-x)}}$ ,  $u^2 = \frac{x-1}{2-x}$ .

## 5.5 Interpretaties van de integraal

In de inleiding van dit hoofdstuk hebben we al opgemerkt dat de integraalrekening vele toepassingen kent, waarbij het van belang is dat *herkend* wordt dat we met een integraal te maken hebben. Tot nu toe hebben we één toepassing van de integraal behandeld, namelijk de oppervlakte interpretatie. In deze paragraaf zullen we aan de hand van een aantal toepassingen laten zien dat er vele andere interpretaties van integralen mogelijk zijn en hoe men in de praktijk herkent dat men met een integraal te maken heeft. Het komt er altijd op neer dat we bij de wiskundige beschrijving op een Riemann-som stuiten, behorend bij een partitie waarvan de maaswijdte naar nul gaat.

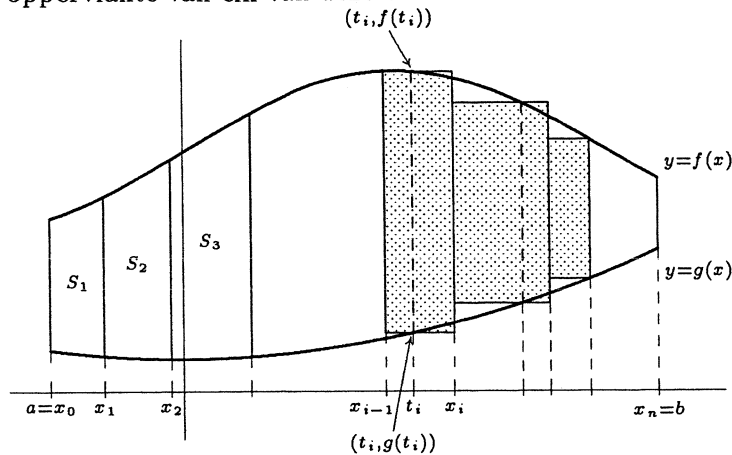
### 5.5.1 De oppervlakte van een vlakdeel

Op de middelbare school is de volgende stelling behandeld:

**STELLING 5.5.1** *Als  $f$  en  $g$  twee op  $[a, b]$  continue functies zijn met de eigenschap dat  $f(x) \geq g(x)$  op  $[a, b]$ , dan is de oppervlakte van het vlakdeel ingesloten door de lijnen  $x = a$ ,  $x = b$  en de grafieken van  $f$  en  $g$  gelijk aan*

$$\int_a^b (f(x) - g(x)) dx.$$

We laten zien hoe deze stelling volgt uit de definitie van de integraal. We verdelen het vlakdeel daartoe in (smalle) verticale stroken  $S_1, S_2, \dots, S_n$ . De keuze van deze stroken komt overeen met de keuze van een partitie  $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  van het interval  $[a, b]$  (zie figuur 5.14). De oppervlakte van elk van deze stroken is te benaderen met de oppervlakte



**FIGUUR 5.14:** De oppervlakte van een vlakdeel

van een rechthoek, waarvan de verticale ligging van de horizontale zijden bepaald wordt door de beelden onder  $f$  en  $g$  van een tussenpunt  $t_i$  in het interval  $[x_{i-1}, x_i]$ . Er geldt dat de oppervlakte van strook  $S_i$  ongeveer gelijk is aan

$$(f(t_i) - g(t_i)) \cdot (x_i - x_{i-1}) = (f(t_i) - g(t_i)) \cdot \Delta x_i,$$

zodat de gevraagde oppervlakte ongeveer gelijk is aan

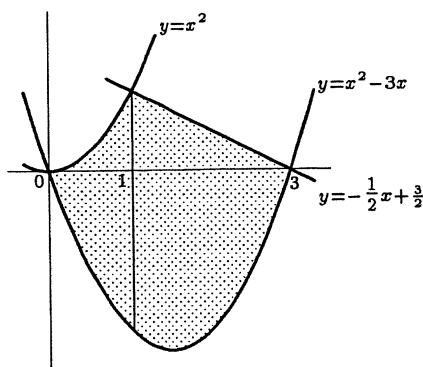
$$\sum_{i=1}^n (f(t_i) - g(t_i)) \cdot \Delta x_i.$$

Dit is een Riemann-som van de functie  $f - g$  bij de partitie  $P$  en de strooiing  $S = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$ . Omdat de benadering van de oppervlakte beter wordt als we de stroken smaller maken (ofwel de maaswijdte naar nul laten gaan), volgt dat de oppervlakte van het vlakdeel gelijk is aan

$$\lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (f(t_i) - g(t_i)) \cdot \Delta x_i = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx.$$

**Opmerking :** Het voorgaande is geen streng wiskundig bewijs. Dit zal in geen van de voorbeelden die nog volgen het geval zijn. We zijn veeleer afgegaan op onze intuïtie. In de praktijk wordt dit ook vrijwel altijd gedaan. Als we willen, kunnen we alles ook streng wiskundig opzetten. Wij nemen echter genoeg met deze intuïtieve benadering. Helaas laat onze intuïtie ons ook wel eens in de steek en worden er fouten gemaakt met dit soort benaderingen, zie bijvoorbeeld opgave 34.

**Voorbeeld 5.5.1:** Bereken de oppervlakte van het vlakdeel ingesloten door de grafieken van de functies  $f(x) = x^2$ ,  $g(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$  en  $h(x) = x^2 - 3x$ , gelegen in het halfvlak met niet-negatieve  $x$ -coördinaat.



FIGUUR 5.15: Het vlakdeel van voorbeeld 5.14

**Aldus:** We tekenen het vlakdeel eerst (zie figuur 5.15). Voor de beschrijving met een integraal, dienen we het vlakdeel in twee stukken te knippen: Het linkerdeel is het deel ingesloten door de grafieken van  $f$  en  $h$  en de lijn  $x = 1$ . De oppervlakte hiervan is gelijk aan

$$\int_0^1 (f(x) - h(x)) dx = \int_0^1 3x dx.$$

Het rechterdeel wordt ingesloten door de lijn  $x = 1$  en de grafieken van  $g$  en  $h$ . De oppervlakte hiervan is

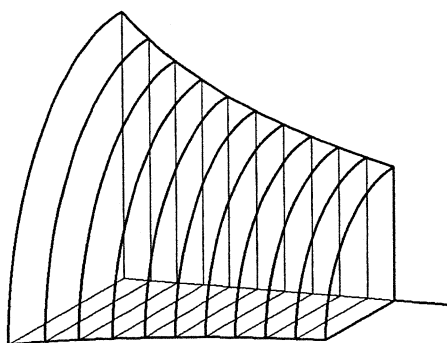
$$\int_1^3 (g(x) - h(x)) dx = \int_1^3 (-x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{3}{2}) dx.$$

### 5.5.2 Volume van een lichaam

Een *lichaam* is een begrensd drie-dimensionaal gebied. We zouden bijvoorbeeld kunnen denken aan een kubus, een balk, een prisma, een omwentelingslichaam, etc. Het doel is een formule te bedenken, waarmee het volume van zo'n lichaam berekend zou kunnen worden. We kunnen dat doen door het lichaam in evenwijdige plakken te snijden en dan het volume  $\Delta V_i$  van elk van de plakken te bepalen. Voor het totale volume  $V$  geldt dan

$$V = \Delta V_1 + \Delta V_2 + \dots + \Delta V_n = \sum_{i=1}^n \Delta V_i.$$

Merk op dat het volume van een dunne plak ongeveer gelijk is aan het product van de oppervlakte van (één van) de snijvlakken met de dikte van de plak. Hoe dunner de plak, hoe beter de benadering. Om in een wiskundige context te komen, denken we ons het lichaam geplaatst in een assenstelsel, waarbij de  $x$ -as zo ligt dat de snijvlakken hier loodrecht op staan (zie figuur 5.16). Veronderstel verder dat het lichaam "ingeklemd" ligt tussen de vlakken  $x = a$  en  $x = b$ . Het in plakken snijden van het lichaam correspondeert dan met het kiezen van een partitie  $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  van het interval  $[a, b]$ , waarbij  $x_i$  de  $x$ -coördinaat is van het  $i$ -de snijvlak.



FIGUUR 5.16: Volumebepaling

We veronderstellen nu dat de oppervlakte van het snijvlak, behorend bij  $x$ , gelijk is aan  $A(x)$ . Er volgt dat de inhoud  $\Delta V_i$  van de plak tussen de snijvlakken behorend bij  $x_{i-1}$  en  $x_i$  ongeveer gelijk is aan  $A(t_i)\Delta x_i = A(t_i)(x_i - x_{i-1})$ , waarbij  $t_i$  een willekeurig gekozen tussenpunt in  $[x_{i-1}, x_i]$  is. Dus

$$V = \sum_{i=1}^n \Delta V_i \approx \sum_{i=1}^n A(t_i) \Delta x_i.$$

Merk op dat dit een Riemann-som van de functie  $A$  is bij de partitie  $P$  en de strooiing  $S = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$  is, en dat de benadering beter wordt als we het lichaam in dunnere plakken snijden, met andere woorden, als we elke  $\Delta x_i$  dichter bij nul kiezen (met andere woorden, als de maaswijdte naar nul gaat). Er volgt:

**STELLING 5.5.2** *Laat  $G$  een lichaam zijn, ingeklemd tussen de vlakken  $x = a$  en  $x = b$ . Als de oppervlakte van het snijvlak loodrecht op de  $x$ -as behorend bij het punt met  $x$ -coördinaat  $x$  gelijk is aan  $A(x)$ , dan geldt voor het volume  $V$  van  $G$*

$$V = \int_a^b A(x) dx.$$

**Voorbeeld 5.5.2:** Bereken de inhoud van een pyramide met hoogte  $h$ , waarvan het grondvlak een vierkant is met zijde  $a$ .

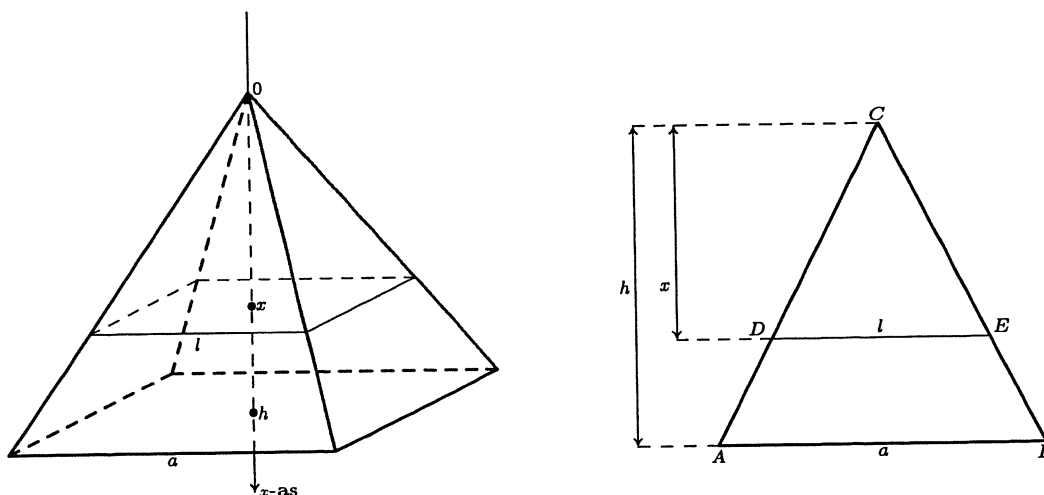
**Aldus:** We plaatsen de pyramide zo in een assenstelsel dat de top in de oorsprong ligt en de  $x$ -as door het midden van het grondvlak gaat (zie figuur 5.17). De doorsnede van de pyramide met het vlak loodrecht op de  $x$ -as en  $x$ -coördinaat  $x$  is een vierkant met zijde  $\frac{a}{h}x$ . Immers, met figuur 5.17 volgt uit de gelijkvormigheid van de driehoeken  $ABC$  en  $DEC$  dat  $l = \frac{a}{h}x$ , en  $l$  is de lengte van de zijde van het snijvierkant met  $x$ -coördinaat  $x$ .

Er volgt dat

$$A(x) = \frac{a^2}{h^2} x^2.$$

Het volume van de pyramide is dus

$$V = \int_0^h A(x) dx = \int_0^h \frac{a^2}{h^2} x^2 dx.$$



FIGUUR 5.17: Volumebepaling van een pyramide

Ga zelf na dat hier  $\frac{1}{3}a^2h$  uit komt. —■

**Opmerking :** De formule uit stelling 5.5.2 heeft alleen zin als we een formule  $A(x)$  voor de oppervlakte van de snijvlakken kunnen bepalen. Bij de pyramide was dit het geval. Bovendien moet  $A$  een integreerbare functie zijn.

### Volume van een omwentelingslichaam

Een *omwentelingslichaam* is een lichaam waarbij een as bestaat, zó dat doorsnijdingen van dit lichaam met vlakken loodrecht op deze as cirkelvormig zijn. Omwentelingslichamen kunnen verkregen worden door een vlakdeel  $R$  om een as te roteren.

**Voorbeeld 5.5.3:** Een bol is een omwentelingslichaam: Roteer een halve cirkel om de middellijn bepaald door de eindpunten van de halve cirkel. —■

**STELLING 5.5.3** *Als het vlakdeel  $R$  begrensd wordt door de  $x$ -as, de lijnen  $x = a$  en  $x = b$  en de grafiek van een functie  $f$ , dan is het volume van het omwentelingslichaam, verkregen door  $R$  om de  $x$ -as te roteren gelijk aan*

$$V = \int_a^b \pi (f(x))^2 dx.$$

**Bewijs:** Als we het lichaam snijden met vlakken loodrecht op de  $x$ -as, dan is het snijvlak een cirkel met straal  $|f(x)|$ . Dus

$$A(x) = \pi (|f(x)|)^2 = \pi (f(x))^2.$$

Toepassen van stelling 5.5.2 levert het gestelde.  $\square$



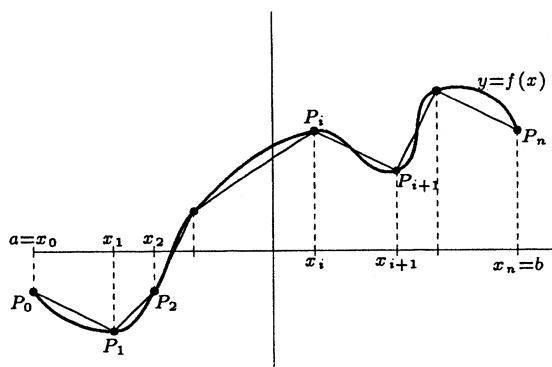
**Voorbeeld 5.5.4:** Een bol met straal  $R$  kan verkregen worden door een halve cirkel met straal  $R$  om de  $x$ -as te winden. We kunnen deze halve cirkel zien als het vlakdeel ingesloten door de  $x$ -as en de grafiek van de functie  $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$  (de vergelijking van de cirkel met straal  $R$  en middelpunt  $(0,0)$  is immers  $x^2 + y^2 = R^2$ ). De inhoud van de bol is dus gelijk aan

$$V = \int_{-R}^R \pi (f(x))^2 dx = \int_{-R}^R \pi (R^2 - x^2) dx.$$

Inderdaad komt hier de bekende formule voor de inhoud van een bol uit:  $\frac{4}{3}\pi R^3$ . —

### 5.5.3 Lengte van een grafiek

In deze paragraaf laten we zien dat de lengte  $s$  van de grafiek van een differentieerbare functie  $f$  op een gesloten begrensd interval  $[a, b]$  te beschrijven is met een integraal. Hiertoe verdelen we de grafiek in allemaal korte stukjes en we benaderen de lengte van elk van deze stukjes met de afstand tussen de eindpunten van deze stukjes (zie figuur 5.18). De som van deze afstanden is een benadering voor de lengte van de grafiek.



**FIGUUR 5.18:** De lengte van de grafiek van een functie

Welnu, we kiezen op de grafiek van  $f$  de punten  $P_0, P_1, \dots, P_n$ , waarbij  $P_0 = (a, f(a))$ ,  $P_n = (b, f(b))$  en  $P_i = (x_i, f(x_i))$  ( $i = 1 \dots n$ ). (De keuze van deze punten correspondeert dus met een partitie  $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ .) Als we de afstand tussen de punten  $P_{i-1}$  en  $P_i$  noteren met  $|P_{i-1}P_i|$  krijgen we

$$s \approx \sum_{i=1}^n |P_{i-1}P_i|.$$

Deze benadering wordt beter als we de grafiek in meer en kortere stukjes opdelen.

Nu geldt

$$|P_{i-1}P_i| = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}. \quad (5.1)$$

Omdat we naar een Riemann-som toe willen werken, moeten we  $|P_{i-1}P_i|$  schrijven als product van een functiewaarde met  $\Delta x_i$ . We gaan dat forceren: Uit formule 5.1 volgt

$$|P_{i-1}P_i| = \sqrt{1 + \left(\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}\right)^2} (x_i - x_{i-1})$$

$$= \sqrt{1 + \left(\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}\right)^2} \Delta x_i.$$

Omdat  $\Delta x_i$  klein genomen dient te worden, geldt

$$\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} \approx f'(x_i),$$

zodat

$$|P_{i-1}P_i| \approx \sqrt{1 + (f'(x_i))^2} \Delta x_i.$$

Dus

$$s \approx \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + (f'(x_i))^2} \Delta x_i,$$

en dit is een Riemann-som bij de integraal

$$\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

We hebben de volgende stelling:

**STELLING 5.5.4** *De lengte  $s$  van de grafiek van een differentieerbare functie  $f$  op het interval  $[a, b]$  is gelijk aan*

$$\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

**Voorbeeld 5.5.5:** De lengte van de parabool  $y = x^2$  met  $x \in [-2, 2]$  is gelijk aan

$$\int_{-2}^2 \sqrt{1 + (2x)^2} dx.$$

#### 5.5.4 Arbeid

Als een deeltje onder invloed van een kracht een zekere weg aflegt, wordt er door deze kracht arbeid verricht. We gaan in deze paragraaf een uitdrukking voor de arbeid bepalen. Daartoe moeten we ons eerst bewust zijn van de definitie van het natuurkundige begrip arbeid.

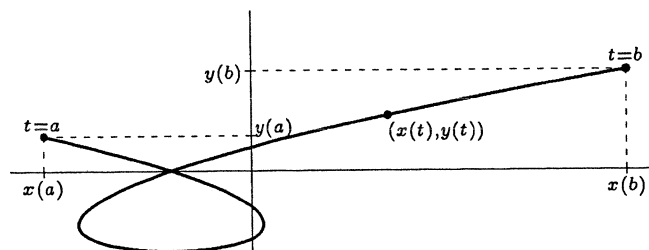
**Definitie:** De *arbeid*  $W$  verricht door een *constante* kracht  $\mathbf{F}$  bij een (rechtlijnige) verplaatsing  $\Delta \mathbf{s}$  is gelijk aan het inwendig product van  $\mathbf{F}$  en  $\Delta \mathbf{s}$ , in formule

$$W = \mathbf{F} \cdot \Delta \mathbf{s} = F \cdot \Delta s \cdot \cos \alpha,$$

waarbij  $\alpha$  de hoek is tussen de kracht en de verplaatsing. (De letters  $\mathbf{F}$  en  $\Delta \mathbf{s}$  zijn vet gedrukt om aan te duiden dat het hier om vectoren gaat, terwijl  $F$  en  $\Delta s$  voor de grootte van de kracht en de verplaatsing staan, dus  $F = \|\mathbf{F}\|$  en  $\Delta s = \|\Delta \mathbf{s}\|$ . Verder staat de dikke punt voor het inwendig product.)

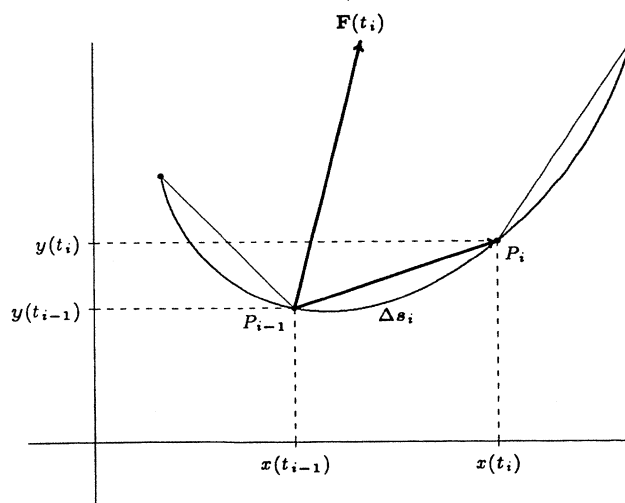
We vragen ons nu af wat de arbeid is die verricht wordt door een eventueel niet constante kracht bij een kromme baan. We behandelen dit voor het geval de kracht en de baan in het platte vlak liggen. Voor de ruimte gaat het analoog.

Welnu, veronderstel dat het deeltje op tijdstip  $t$  op plaats  $(x(t), y(t))$  is ( $t \in [a, b]$ ). Dus  $x(t)$  is de  $x$ -coördinaat van het deeltje op tijdstip  $t$  en  $y(t)$  de  $y$ -coördinaat (zie figuur 5.19). Omdat de kracht veranderlijk is en de verplaatsing geen rechte lijn, kunnen we de definitie van arbeid niet zo maar toepassen. We verdelen de doorlopen baan daarom in een groot



**FIGUUR 5.19:** De afgelegde baan van een deeltje

aantal kleine stukjes, zo klein dat deze bij benadering als recht beschouwd mogen worden. De kracht, verricht bij zo'n klein stukje verplaatsing, is bij benadering constant. Op zo'n klein stukje kunnen we de definitie dus wel toepassen en daarmee de arbeid op dit kleine stukje baan bij benadering uitrekenen. De totale arbeid is dan (bij benadering) gelijk aan de som van al de gevonden arbeiden.



**FIGUUR 5.20:** Een paar stukjes van de baan

Veronderstel nu dat we de baan in  $n$  kleine stukjes verdeeld hebben. Het  $i$ -de stukje correspondeert met een tijdsinterval  $[t_{i-1}, t_i]$  ( $t_0 = a$  en  $t_n = b$ ). Het stukje baan loopt dan van het punt  $P_{i-1}$  met coördinaten  $(x(t_{i-1}), y(t_{i-1}))$  naar het punt  $P_i$  met coördinaten  $(x(t_i), y(t_i))$ . De verplaatsing  $\Delta s_i$  binnen dit stukje is nu bij benadering gelijk aan de

vector die van  $P_{i-1}$  naar  $P_i$  gaat (zie figuur 5.20), dus

$$\Delta \mathbf{s}_i \approx \begin{bmatrix} x(t_i) - x(t_{i-1}) \\ y(t_i) - y(t_{i-1}) \end{bmatrix}$$

De kracht veronderstellen we op het stukje baan  $P_{i-1}P_i$  constant gelijk aan  $\mathbf{F}(t_i)$ , in vectornotatie

$$\mathbf{F}(t_i) = \begin{bmatrix} F_x(t_i) \\ F_y(t_i) \end{bmatrix}.$$

Voor de arbeid  $W_i$  verricht op dit stukje van de baan geldt dus

$$W_i \approx \mathbf{F}(t_i) \cdot \Delta \mathbf{s}_i,$$

zodat de totale arbeid  $W$  ongeveer gelijk is aan

$$W \approx \sum_{i=1}^n \mathbf{F}(t_i) \cdot \Delta \mathbf{s}_i, \quad (5.2)$$

Omdat de benadering beter wordt als we de kromme in kleinere stukjes verdelen en omdat de laatste uitdrukking op een Riemann-som lijkt, zeggen natuurkundigen: De arbeid verricht door een veranderlijke kracht  $\mathbf{F}$  bij een verplaatsing van  $A$  naar  $B$  via een niet per se rechte baan is gelijk aan

$$W = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}.$$

Echter, wij herkennen nog geen Riemann-som in uitdrukking 5.2. De door ons gebruikte variabele is immers de tijd  $t$ , dus de Riemann-som moet van de vorm  $\sum f(\xi_i) \Delta t_i$  zijn, waarbij  $\xi_i$  een tijdstip tussen  $t_{i-1}$  en  $t_i$  is. We gaan uitdrukking 5.2 daarom verder analyseren. We schrijven hem eerst uit:

$$\begin{aligned} W &\approx \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} F_x(t_i) \\ F_y(t_i) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x(t_i) - x(t_{i-1}) \\ y(t_i) - y(t_{i-1}) \end{bmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^n (F_x(t_i) (x(t_i) - x(t_{i-1})) + F_y(t_i) (y(t_i) - y(t_{i-1}))) \end{aligned}$$

Net als in de vorige paragraaf forceren we met behulp van de laatste formule als volgt weer een Riemann-som:

$$W \approx \sum_{i=1}^n \left( F_x(t_i) \frac{x(t_i) - x(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} + F_y(t_i) \frac{y(t_i) - y(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} \right) \Delta t_i$$

( $\Delta t_i$  is immers  $t_i - t_{i-1}$ ). Omdat  $\Delta t_i$  klein genomen wordt, volgt

$$\frac{x(t_i) - x(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} \approx x'(t_i) \quad \text{en} \quad \frac{y(t_i) - y(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} \approx y'(t_i)$$

zodat

$$W \approx \sum_{i=1}^n (F_x(t_i) x'(t_i) + F_y(t_i) y'(t_i)) \Delta t_i.$$

Dit is een Riemann-som bij

$$\int_a^b (F_x(t)x'(t) + F_y(t)y'(t)) dt = \int_a^b \mathbf{F}(t) \cdot \mathbf{s}'(t) dt,$$

waarbij

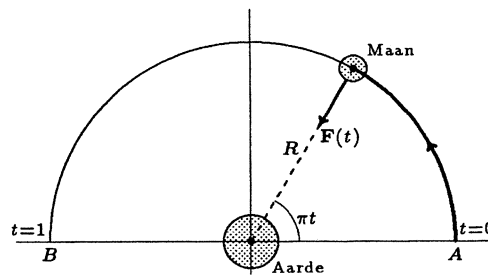
$$\mathbf{s}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}.$$

We concluderen nu

**STELLING 5.5.5** *Als een deeltje een baan  $\mathbf{s}(t)$  met  $t \in [a, b]$  aflegt onder invloed van een kracht  $\mathbf{F}(t)$ , dan is de arbeid die deze kracht verricht op het deeltje gelijk aan*

$$\int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_a^b \mathbf{F}(t) \cdot \mathbf{s}'(t) dt.$$

**Voorbeeld 5.5.6:** We gaan de arbeid berekenen die de aarde verricht op de maan als deze een halve baan om de aarde aflegt. We nemen daarbij aan dat deze baan cirkelvormig is. Verder veronderstellen we dat de maan op tijdstip 0 in punt  $A$  is en op tijdstip 1 in punt  $B$  (zie figuur 5.21). Ga na dat geldt



**FIGUUR 5.21:** De baan van de maan om de aarde

$$\mathbf{s}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R \cos \pi t \\ R \sin \pi t \end{bmatrix}.$$

met  $t \in [0, 1]$ .

Voor de grootte van de kracht, die de aarde op tijdstip  $t$  uitoefent op de maan, geldt (onafhankelijk van  $t$ )  $F = G \frac{mM}{R^2}$ , waarbij  $m$  de massa van de maan is,  $M$  de massa van de aarde,  $R$  de afstand van het middelpunt van de aarde tot het middelpunt van de maan en  $G$  de gravitatieconstante. Echter, dit is slechts de grootte van de kracht. We hebben de kracht als vector nodig!!! We bepalen die vector: Als we ons in het punt  $(x, y)$  bevinden, wijst de vector

$$- \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

in de richting van de oorsprong en dus in de richting van de kracht. Omdat op de baan geldt  $x = x(t) = R \cos \pi t$  en  $y = y(t) = R \sin \pi t$ , volgt dat de vector

$$- \begin{bmatrix} R \cos \pi t \\ R \sin \pi t \end{bmatrix}$$

de richting van de kracht is op tijdstip  $t$ . Omdat de lengte van deze vector  $R$  is, geldt

$$\mathbf{F}(t) = -G \frac{mM}{R^2} \cdot \frac{1}{R} \begin{bmatrix} R \cos \pi t \\ R \sin \pi t \end{bmatrix} = -G \frac{mM}{R^2} \begin{bmatrix} \cos \pi t \\ \sin \pi t \end{bmatrix}.$$

We concluderen

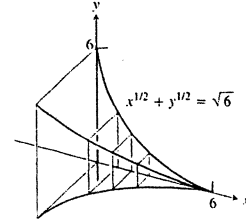
$$\begin{aligned} W &= \int_0^1 \mathbf{F}(t) \cdot \mathbf{s}'(t) dt \\ &= \int_0^1 -G \frac{mM}{R^2} \begin{bmatrix} \cos \pi t \\ \sin \pi t \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -R\pi \sin \pi t \\ R\pi \cos \pi t \end{bmatrix} dt \\ &= \int_0^1 -G \frac{mM}{R^2} (-R\pi \cos \pi t \sin \pi t + R\pi \cos \pi t \sin \pi t) dt \\ &= 0. \end{aligned}$$

Dit hadden we al kunnen inzien: De kracht staat steeds loodrecht op de verplaatsing, zodat het inwendig product nul moet zijn en dus de arbeid ook. —

### OPGAVEN (bij §5.5)

- d 25. Bepaal de oppervlakte van het gebied dat begrensd wordt door
- de lijnen  $x = 0$ ,  $x = \frac{\pi}{2}$  en de grafieken van de functies  $f(x) = 3 + x$  en  $g(x) = \sin x$ ;
  - de  $x$ -as, de  $y$ -as en de kromme met vergelijking  $x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}$  met  $a > 0$ .
- h 26. Bepaal de oppervlakte van het gebied dat ingesloten wordt door de ellips met vergelijking  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ .
- h 27. Bepaal de oppervlakte van het gebied dat begrensd wordt door de lijnen  $y = -1$ ,  $y = 10$ , de  $y$ -as en de grafiek van de functie  $f(x) = \ln x$ .
- t 28. Bepaal het volume van het omwentelingslichaam dat ontstaat door het gebied dat begrensd wordt door de lijnen  $y = 0$ ,  $x = 1$ ,  $x = 3$  en de kromme  $y = x^3$
- te wentelen om de  $x$ -as;
  - te wentelen om de  $y$ -as.
- h 29. (a) Schets het lichaam dat ontstaat door het gebied dat begrensd wordt  $(x - 10)^2 + y^2 = 1$  te wentelen om de  $y$ -as. Dit lichaam wordt een torus genoemd.
- Bepaal het volume van deze torus.
  - Druk de inhoud van een torus uit in zijn parameters  $r$  en  $R$ , waarbij  $r$  de straal is van de cirkel die gewenteld wordt, en  $R$  de afstand is van het middelpunt (van de cirkel die gewenteld wordt) tot de omwentelings-as.
- t 30. Bepaal het volume van het omwentelingslichaam dat ontstaat door het gebied dat begrensd wordt door de lijn  $y = x$  en de parabool  $y^2 = 4x$  te wentelen om de lijn
- $x = 4$ ;
  - $y = 4$ .

- t 31. In figuur 5.22 wordt een lichaam  $G$  gegeven dat begrensd wordt door de vlakken  $x = 0$  en  $x = 6$ . De doorsneden van  $G$  met de vlakken loodrecht op de  $x$ -as zijn vierkanten waarvan de bases tussen de  $x$ -as en de kromme  $x^{1/2} + y^{1/2} = \sqrt{6}$  liggen. Bepaal het volume van  $G$ .



FIGUUR 5.22: De figuur bij opgave 31

- Xt 32. Gegeven twee cilinders met straal 1, die elkaar loodrecht snijden. Laat  $V$  het lichaam zijn dat begrensd wordt door deze cilinders.

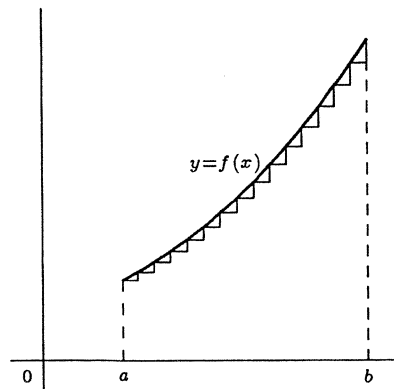
(a) Ga na dat het lichaam beschreven wordt door

$$\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq 1\} \cap \{(x, y, z) \mid x^2 + z^2 \leq 1\}.$$

(b) Beschrijf de snijfiguur van  $V$  met het vlak  $x = \alpha$  waarbij  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

(c) Bepaal het volume van  $V$ .

- t 33. Bepaal de inhoud van een kegel waarvan het grondvlak een ellips is die bepaald wordt door de formule  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  en waarvan de hoogte  $h$  is.
- t 34. We willen van een functie  $f$  op  $[a, b]$  zijn booglengte  $l$  op een andere manier bepalen dan gedaan is in §5.5.3. Daartoe benaderen we de grafiek met een trapfunctie (zie figuur 5.23). De lengte  $l$  benaderen we vervolgens met



FIGUUR 5.23: De figuur bij opgave 34

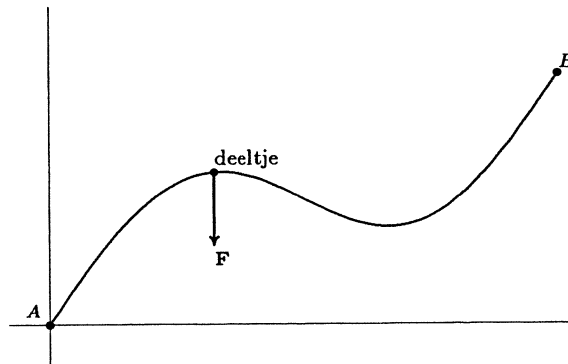
$$\sum_i ((x_{i+1} - x_i) + (f(x_{i+1}) - f(x_i))).$$

- (a) Ga na dat deze formule de "lengte van de trap" geeft, als de partitie van het interval  $[a, b]$  gelijk is aan  $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ .

- (b) Forceer op de manier van bladzijde 209 een Riemannsom.  
 (c) Geef een bijbehorende integraal.  
 (d) Bereken de booglengte van  $y = x^2$  met  $x \in [0, 1]$  m.b.v. deze integraal.  
 (e) Bereken de booglengte ook met de formule die afgeleid is in §5.5.3 en trek uw conclusies.

- h 35. Een puntmassa bevindt zich in een krachtveld  $\mathbf{F}$  in de ruimte. In punt  $(x, y, z)$  wordt de kracht die, onder invloed van dit krachtveld op de puntmassa werkt, gegeven door  $\mathbf{F}(x, y, z) = \begin{bmatrix} xy \\ y \\ -yz \end{bmatrix}$ . De plaatsvector  $\mathbf{s}(t)$  van de puntmassa wordt gegeven door  $\mathbf{s}(t) = \begin{bmatrix} t \\ t^2 \\ t \end{bmatrix}$  waarbij  $t \in [0, 1]$ .
- (a) Bepaal de arbeid verricht door de kracht  $\mathbf{F}$ .  
 (b) Hoeveel arbeid verricht  $\mathbf{F}$  als het deeltje langs dezelfde baan beweegt maar nu in tegengestelde richting?

- t 36. Gegeven een deeltje dat in een plat vlak via een epaalde baan van punt  $A$  naar punt  $B$  beweegt. We kiezen een coördinaten-stelsel zo dat punt  $A$  in de oorsprong ligt (zie figuur 5.24).



FIGUUR 5.24: De figuur bij opgave 36

- (a) Ga na dat als het deeltje zich in het zwaartekrachtsveld bevindt, de zwaartekracht  $\mathbf{F}$  die in het punt  $(x, y)$  op het deeltje werkt gegeven wordt door  $\mathbf{F}(x, y) = \begin{bmatrix} 0 \\ -mg \end{bmatrix}$ .

Bereken de arbeid verricht door de zwaartekracht voor de volgende twee banen:

- (b)  $\mathbf{s}(t) = \begin{bmatrix} t \\ ht \end{bmatrix}$  met  $t \in [0, 1]$  (het deeltje gaat dus in een rechte lijn van het punt  $A = (0, 0)$  naar het punt  $B = (1, h)$ ).  
 (c)  $\mathbf{s}(t) = \begin{bmatrix} t \\ ht^2 \end{bmatrix}$  met  $t \in [0, 1]$  (het deeltje gaat dus in een parabolbaan van het punt  $A = (0, 0)$  naar het punt  $B = (1, h)$ ).



- (d) Beschouw nu een willekeurig pad van  $A$  naar  $B$  en laat zien dat de arbeid verricht door de zwaartekracht gelijk is aan  $-mgh$ .

h 37. Een kromme  $\kappa$  kan beschreven worden door een zogenaamde parametervoorstelling  $\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$  met  $t \in [a, b]$ . We gaan in deze opgave een formule voor de booglengte  $l$  van  $\kappa$  bepalen. Daartoe nemen we een partitie  $P = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$  van  $[a, b]$ .

- (a) Ga middels een plaatje na dat de booglengte  $l$  wordt benaderd door de uitdrukking

$$\sum_{i=1}^n \sqrt{(x(t_i) - x(t_{i-1}))^2 + (y(t_i) - y(t_{i-1}))^2}.$$

- (b) Forceer op de manier van bladzijde 209 een Riemannsom.  
 (c) Laat zien dat de booglengte  $l$  van  $\kappa$  gegeven wordt door

$$l = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt.$$

h 38. (a) Geef een geschikte parametervoorstelling  $\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$  van een cirkel met straal  $r$ .

- (b) Bereken hiermee en met behulp van opgave 37 de omtrek van de cirkel.

- (c) Dezelfde vraag als (a), maar nu voor de ellips  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ .

- (d) Stel een integraal op die de omtrek van de ellips bepaalt.

Helaas bestaat er van deze integrand geen primitieve die uitgedrukt kan worden in de ons bekende standaardfuncties (op sommige waarden voor  $a$  en  $b$  na). Om de lengte van een ellips te bepalen zijn we dus aangewezen op zogenaamde numerieke methoden. Deze worden behandeld in §5.6 (zie bijvoorbeeld opgave 45).

## 5.6 Numerieke integratie

Laat  $f$  een continue functie zijn. We hebben gezien dat de bepaalde integraal  $\int_a^b f(x) dx$  dan bestaat. De ideale manier om deze bepaalde integraal te berekenen ging via een primitieve  $G$  van  $f$ , waarbij deze primitieve uitgedrukt moet zijn in elementaire functies. In 5.4.1 hebben we echter opgemerkt dat dit laatste niet altijd lukt. Voorbeelden hiervan zijn de functies  $\frac{\sin x}{x}$  en  $\sqrt{1+x^4}$ : Primitieven hiervan zijn niet uit te drukken zijn in elementaire functies. Verder zijn er vele functies waarvan het uitdrukken van primitieven in elementaire functies zeer lastig is. In zulke gevallen zullen we de integraal moeten benaderen. Dit zou bijvoorbeeld kunnen op de manier van §5.1, dus middels Riemannsommen. Deze methode is echter niet favoriet, omdat de fout bij de benadering vrij groot is: We moeten het integratie-interval in vele sub-intervallen verdelen om een nauwkeurige schatting van de integraal te verkrijgen. In deze paragraaf zullen we een tweetal betere numerieke methoden behandelen: De trapeziumregel en de Simpsonregel. Deze regels stellen ons in staat een integraalwaarde te schatten met iedere gewenste nauwkeurigheid.

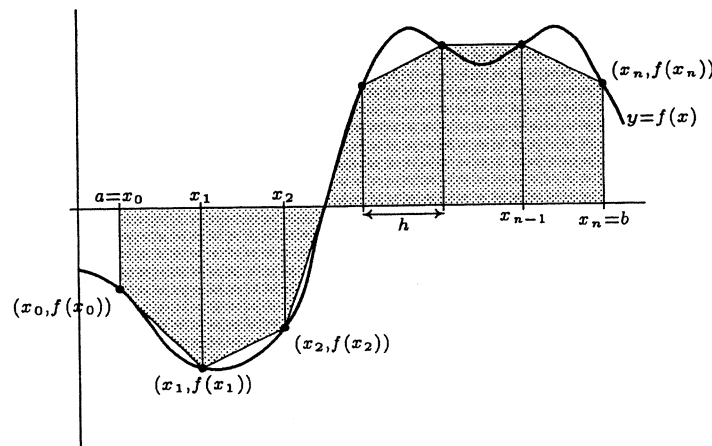
Het idee achter deze benaderingsmethoden is het volgende: We verdelen het interval  $[a, b]$  in deelintervallen van gelijke lengte. Op elk van deze deelintervallen vervangen we  $f$  door een polynoom die op het betreffende interval een aantal punten met  $f$  gemeen heeft. Hierna gaan we de gevonden polynomen op het betreffende deelinterval integreren. De gevraagde benadering wordt de som van elk van deze resultaten. Gebruikmaking van eerstegraadspolynomen leidt tot de trapeziumregel en gebruikmaking van tweedegraadspolynomen leidt tot de Simpsonregel. (Merk op dat Riemann-sommen ook zo werken: We vervangen  $f$  dan op elk van de deelintervallen door een constante, en dat is een nuldegraadspolynoom!)

### 5.6.1 De Trapeziumregel

We willen  $\int_a^b f(x) dx$  benaderen. Daartoe verdelen we het interval  $[a, b]$  in  $n$  deelintervallen van lengte

$$h = \frac{(b - a)}{n}.$$

We krijgen zo een partitie  $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  van  $[a, b]$ . Hierna verbinden we de punten  $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$  en  $(x_i, f(x_i))$  met een lijnstuk. Deze lijnstukken vormen, samen met de corresponderende verticale lijnen vanuit de eindpunten van de subintervallen, trapezia. De som van de oppervlakten (met + of - teken) geven een benadering van  $\int_a^b f(x) dx$ , zie figuur 5.25.)

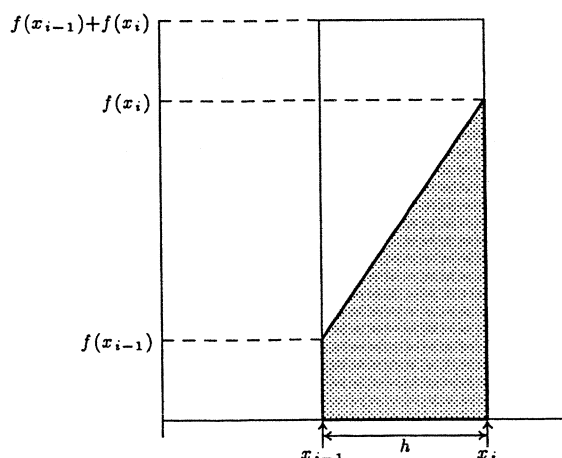


FIGUUR 5.25: De trapeziumregel

We gaan een formule voor deze benadering afleiden. Hiertoe nemen we eerst het  $i$ -de subintervalletje  $[x_{i-1}, x_i]$  apart en we bepalen de oppervlakte  $\mathcal{O}_i$  van het bijbehorende trapezium met behulp van figuur 5.26: Deze is gelijk aan de helft van de rechthoek met breedte  $h$  en hoogte  $f(x_{i-1}) + f(x_i)$ , dus

$$\mathcal{O}_i = \frac{1}{2}h (f(x_{i-1}) + f(x_i)).$$

Nu kunnen we de som  $T_h$  van de oppervlakten van alle trapezia bepalen:



FIGUUR 5.26: De oppervlakte van een trapezium

$$\begin{aligned}
 T_h &= O_1 + O_2 + \cdots + O_n \\
 &= \frac{1}{2}h(f(x_0) + f(x_1)) + \frac{1}{2}h(f(x_1) + f(x_2)) + \cdots + \frac{1}{2}h(f(x_{n-1}) + f(x_n)) \\
 &= \frac{1}{2}h(f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n))
 \end{aligned}$$

Dit leidt tot het volgende:

**STELLING 5.6.1 (De trapeziumregel)** *Zij  $f$  een op het interval  $[a, b]$  continue functie. Zij  $n \in \mathbb{N}$  en  $h = \frac{b-a}{n}$ . Dan kunnen we*

$$\int_a^b f(x) dx$$

benaderen met

$$T_h = \frac{1}{2}h(f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n))$$

waarbij  $x_0 = a$ ,  $x_1 = a + h$ ,  $x_2 = a + 2h, \dots$ ,  $x_{n-1} = a + (n-1)h$ ,  $x_n = a + nh = b$  (we verdelen  $[a, b]$  dus in  $n$  deelintervallen van gelijke lengte).

**Voorbeeld 5.6.1:** We gebruiken de trapeziumregel om  $\int_1^2 x^2 dx$  te schatten. Daartoe verdelen we  $[1, 2]$  in 4 deelintervallen. Dus  $h = \frac{1}{4}$ ,  $x_0 = 1$ ,  $x_1 = 1\frac{1}{4}$ ,  $x_2 = 1\frac{1}{2}$ ,  $x_3 = 1\frac{3}{4}$  en  $x_4 = 2$ . Er volgt

$$\begin{aligned}
 \int_1^2 x^2 dx &\approx T_{1/4} \\
 &= \frac{1}{2}h(f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)) \\
 &= \frac{1}{8}(1 + 2 \cdot \frac{25}{16} + 2 \cdot \frac{36}{16} + 2 \cdot \frac{49}{16} + 4) \\
 &= \frac{75}{32} = 2,34375.
 \end{aligned}$$

De exacte waarde wordt gegeven door

$$\int_1^2 x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 \Big|_1^2 = \frac{7}{3} = 2,333\dots$$

Blijkbaar geeft de trapeziumregel een overschatting van iets meer dan 0.01. Ga zelf met een tekeningetje na dat de trapezia inderdaad iets boven de grafiek van  $f(x) = x^2$  uitsteken.

In het voorgaande hebben we aannemelijk gemaakt dat een integraal met de trapeziumregel benaderd kan worden. Verder suggereren plaatjes dat de benadering beter wordt als we  $n$  (d.w.z. het aantal subintervallen) laten groeien, en dus de “stapgrootte”  $h$  af laten nemen. Als  $f$  maar voldoende netjes is, dan kunnen we bewijzen dat dit alles ook echt geldt. We kunnen dan namelijk een bovengrens voor de absolute waarde van de fout geven, zoals de volgende stelling vermeldt. We zullen deze stelling niet bewijzen. Ga nog na dat de fout, die we noteren met  $R_T$ , gegeven wordt door

$$R_T = \int_a^b f(x) dx - T_h.$$

**STELLING 5.6.2 (Nauwkeurigheid van de trapeziumregel)** *Zij  $f$  een functie met continue tweede afgeleide op  $[a, b]$ . Laat  $M$  een bovengrens zijn voor  $|f''(x)|$  op  $[a, b]$ . Dan geldt*

$$|R_T| = \left| \int_a^b f(x) dx - T_h \right| \leq \frac{b-a}{12} h^2 M.$$

Hierbij is  $T_h$  de formule uit stelling 5.6.1

Inderdaad blijkt uit deze stelling dat de maximale fout kleiner wordt als we het aantal subintervallen groter maken:  $h$  wordt dan namelijk kleiner.

**Opmerking :** We merken nog op dat het getal  $M$  in veel gevallen lastig te vinden is. Tegenwoordig kunnen we met behulp van computers vaak wel snel een schets van functies maken, en dus ook van de functie  $f''$ . Uit deze schets kunnen we dan een bovengrens voor  $f''$  aflezen. Natuurlijk is dit geen correcte methode, maar in veel gevallen wel afdoende.

**Voorbeeld 5.6.2:** Geef een bovengrens voor de (absolute waarde van de) fout als we

$$\int_0^1 x \sin x dx$$

benaderen met de trapeziumregel in 10 stappen.

**Aldus:** Deze bovengrens wordt volgens bovenstaande stelling gegeven door

$$\frac{b-a}{12} h^2 M.$$

In ons geval is  $b = 1$  en  $a = 0$ . Verder is  $h = \frac{b-a}{n} = \frac{1}{10}$ . Er rest ons het getal  $M$  te zoeken. Dit is een bovengrens voor de functie

$$|f''(x)| = |2 \cos x - x \sin x|,$$

op het interval  $[0, 1]$ . Volgens de driehoeksongelijkheid geldt

$$|f''(x)| = |2 \cos x - x \sin x| \leq 2|\cos x| + |x| \cdot |\sin x| \leq 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 3,$$

want  $0 \leq x \leq 1$ , zodat  $|x| \leq 1$ . We kunnen dus  $M = 3$  nemen en voor de fout  $R_T$  geldt

$$|R_T| \leq \frac{1}{12} \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^2 \cdot 3 = 0.0025.$$

De (absolute waarde van de) fout bij benadering van de integraal met de trapeziumregel voor  $n = 10$  is dus hooguit  $2.5 \cdot 10^{-3}$ . —

**Voorbeeld 5.6.3:** We willen m.b.v. de trapeziumregel

$$\int_0^\pi \sin x^2 dx$$

schatten tot op 5 cijfers achter de komma. Dit betekent dat de fout tussen  $-0.000005 = -5 \cdot 10^{-6}$  en  $0.000005 = 5 \cdot 10^{-6}$  moet liggen. Met andere woorden: De absolute waarde van de fout mag hooguit  $5 \cdot 10^{-6}$  zijn. De vraag is hoe groot we  $n$  moeten nemen.

Voor de fout  $|R_T|$  geldt

$$|R_T| \leq \frac{b-a}{12} h^2 M.$$

Als we er voor zorgen dat het rechterlid op zijn beurt kleiner is dan  $5 \cdot 10^{-6}$ , weten we zeker dat de fout in de benadering dit ook is! We lossen dus op

$$\frac{b-a}{12} h^2 M < 5 \cdot 10^{-6}.$$

Welnu, in onze situatie is  $b = \pi$  en  $a = 0$ . Verder is  $M$  een bovengrens voor  $f''(x)$  op het interval  $[0, \pi]$ . Nu is

$$f''(x) = 2 \cos x^2 - 4x^2 \sin x^2.$$

We kunnen (eventueel m.b.v. van een computer) de grafiek van  $f''(x)$  schetsen op  $[0, \pi]$  en inzien dat  $|f''(x)| < 35$  op  $[0, \pi]$ . We nemen dus  $M = 35$ .

Merk verder op dat

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{\pi}{n}.$$

We moeten dus oplossen

$$\frac{b-a}{12} h^2 M = \frac{35\pi^3}{12n^2} < 5 \cdot 10^{-6}.$$

Dit geldt als

$$n^2 > \frac{35\pi^3}{12 \cdot 5 \cdot 10^{-6}}.$$

Dus als

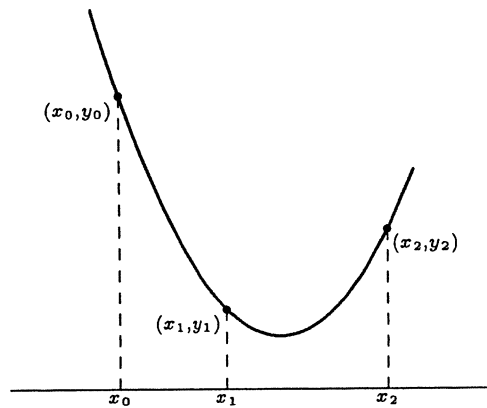
$$n > \sqrt{\frac{35\pi^3}{12 \cdot 5 \cdot 10^{-6}}} \approx 4252,88.$$

Als we  $n$  dus bijvoorbeeld 5000 nemen, hebben we aan de eis voldaan. Uiteraard rekenen we deze benadering niet met de hand door. —

### 5.6.2 De Simpsonregel

In de vorige paragraaf hebben we een interval in  $n$  deelintervallen van gelijke lengte verdeeld en de bijbehorende punten  $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$  en  $(x_i, f(x_i))$  op de grafiek van een functie  $f$  met een lijnstuk verbonden. De som van de oppervlakten van de zo ontstane trapezia gaven toen een benadering voor de integraal.

Bij de Simpsonregel doen we iets dergelijks: We verbinden de genoemde punten nu niet met een lijnstuk, maar met een parabool. De vraag is alleen: Lukt dat altijd? Het antwoord is ja, als we een derde punt in de beschouwing betrekken. De volgende stelling zegt namelijk dat door elk drietal punten (die niet op een lijn liggen, en waarvan de  $x$ -coördinaten allemaal verschillend zijn) precies één parabool gaat (zie ook figuur 5.27).



FIGUUR 5.27: Door een drietal punten gaat precies één parabool

**STELLING 5.6.3** *Bij een drietal punten met verschillende  $x$ -coördinaten bestaat precies één functie  $f$  van de vorm  $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ , waarvan de grafiek door die drie punten gaat. Deze grafiek is een rechte als de punten op één lijn liggen en een parabool als dat niet het geval is.*

**Bewijs:** Noem de punten  $(x_0, y_0)$ ,  $(x_1, y_1)$  en  $(x_2, y_2)$ . Dan moet gelden

$$f(x_0) = y_0, \quad f(x_1) = y_1, \quad \text{en} \quad f(x_2) = y_2.$$

Met andere woorden:

$$\begin{cases} a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 = y_0 \\ a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 = y_1 \\ a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2 = y_2 \end{cases}$$

Dit komt overeen met de matrixvergelijking

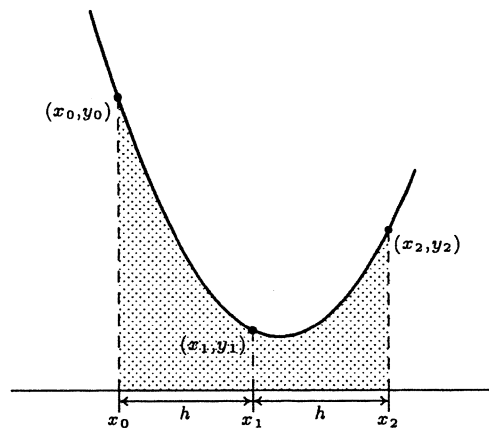
$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \\ 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}.$$

Nu is de determinant van de matrix gelijk aan  $(x_1 - x_0)(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)$ . Omdat  $x_0$ ,  $x_1$  en  $x_2$  allemaal verschillend zijn, is de determinant ongelijk aan 0 en de matrix dus inverteerbaar. We kunnen concluderen dat er precies één oplossing voor  $a_0$ ,  $a_1$  en  $a_2$  is.  $\square$

We bekijken nu de speciale situatie dat we drie punten  $(x_0, y_0)$ ,  $(x_1, y_1)$  en  $(x_2, y_2)$  hebben, waarvoor geldt dat  $x_0 < x_1 < x_2$  en dat  $x_1$  het midden is van het interval  $[x_0, x_2]$ . Het verschil  $x_1 - x_0$  noemen we  $h$ . Merk op dat dan  $x_1 = x_0 + h$  en  $x_2 = x_0 + 2h$  (zie figuur 5.28). We krijgen de volgende stelling:

**STELLING 5.6.4** *Zij  $x_0 \in \mathbb{R}$  en  $h > 0$ . Laat verder  $x_1 = x_0 + h$  en  $x_2 = x_0 + 2h$ . Zij  $p$  het polynoom van graad 1 of 2, waarvan de grafiek door de punten  $(x_0, y_0)$ ,  $(x_1, y_1)$  en  $(x_2, y_2)$  gaat. Dan geldt*

$$\int_{x_0}^{x_2} p(x) dx = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2).$$



**FIGUUR 5.28:** De oppervlakte is gelijk aan  $\frac{1}{3}h(y_0 + 4y_1 + y_2)$

**Bewijs:** Merk op dat  $\int_{x_0}^{x_2} p(x) dx$  gelijk is aan

$$\int_{-h}^h q(x) dx,$$

waarbij  $q(x) = Ax^2 + Bx + C$  de eerste- (als  $A = 0$ ) of tweedegraadsfunctie is, waarvan de grafiek door de punten  $(-h, y_0)$ ,  $(0, y_1)$  en  $(h, y_2)$  gaat. (In feite hebben we de  $y$ -as van de oorspronkelijke situatie verschoven naar de verticale lijn met  $x$ -coördinaat  $x_1$ ). Nu is

$$\int_{-h}^h q(x) dx = \int_{-h}^h (Ax^2 + Bx + C) dx = \left( \frac{1}{3}Ax^3 + \frac{1}{2}Bx^2 + Cx \right) \Big|_{-h}^h = \frac{1}{3}h(2Ah^2 + 6C) \quad (5.3)$$

Omdat de grafiek van  $q$  door de 3 punten  $(-h, y_0)$ ,  $(0, y_1)$  en  $(h, y_2)$  gaat, komen we tot de volgende 3 vergelijkingen

$$\begin{cases} y_0 = Ah^2 - Bh + C \\ y_1 = C \\ y_2 = Ah^2 + Bh + C \end{cases}$$

De tweede vergelijking geeft  $C = y_1$  en de som van de eerste en de derde  $2Ah^2 + 2C = y_0 + y_2$ . Er volgt nu met vergelijking 5.3 dat

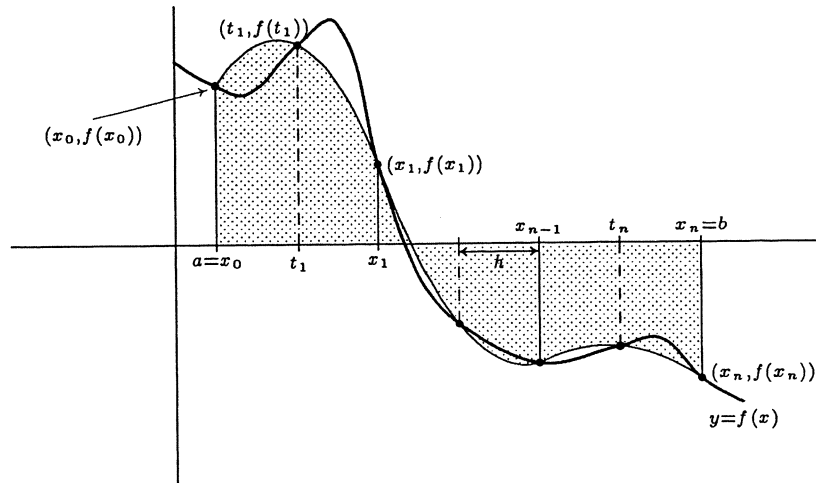
$$\int_{x_0}^{x_1} p(x) dx = \int_{-h}^h q(x) dx = \frac{1}{3}h(2Ah^2 + 2C + 4C) = \frac{1}{3}h(y_0 + 4y_1 + y_2),$$

hetgeen we wilden bewijzen.  $\square$

We zijn nu zo ver dat we de Simpsonregel kunnen afleiden. Het doel is weer een bepaalde integraal  $\int_a^b f(x) dx$  te benaderen. Hiertoe verdelen we, evenals bij de trapeziumregel, het interval  $[a, b]$  weer in  $n$  subintervallen van gelijke lengte. We krijgen zo een partitie  $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  van  $[a, b]$ . Hierna verbinden we de punten  $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$  en  $(x_i, f(x_i))$  met een parabool  $p_i$ . Het derde punt wat we hierbij gebruiken is het punt  $(t_i, f(t_i))$ , waarbij  $t_i$  het midden van het  $i$ -de subintervalletje  $[x_{i-1}, x_i]$  is (zie figuur 5.29). De som van de integralen

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} p_i(x) dx$$

geeft een benadering van  $\int_a^b f(x) dx$  (zie figuur 5.29). Met behulp van stelling 5.6.4 kunnen



FIGUUR 5.29: De simpsonregel

we heel snel een formule voor deze benadering afleiden. Als we de afstand van het randpunt tot het midden van een subintervalletje namelijk  $h$  noemen (er geldt  $h = (b-a)/2n$ ), geeft genoemde stelling:

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} p_i(x) dx = \frac{1}{3}h(f(x_{i-1}) + 4f(t_i) + f(x_i)).$$



Nu kunnen we de som  $S_h$  van deze integralen bepalen:

$$\begin{aligned} S_h &= \int_{x_0}^{x_1} p_1(x) dx + \int_{x_1}^{x_2} p_2(x) dx + \dots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} p_n(x) dx \\ &= \frac{1}{3}h (f(x_0) + 4f(t_1) + f(x_1)) + \frac{1}{3}h (f(x_1) + 4f(t_2) + f(x_2)) + \dots + \\ &\quad \frac{1}{3}h (f(x_{n-1}) + 4f(t_n) + f(x_n)) \\ &= \frac{1}{3}h (f(x_0) + 4f(t_1) + 2f(x_1) + 4f(t_2) + \dots + 2f(x_{n-1}) + 4f(t_n) + f(x_n)). \end{aligned}$$

Dit leidt tot het volgende:

**STELLING 5.6.5 (De Simpsonregel)** *Zij  $f$  een op het interval  $[a, b]$  continue functie. Zij  $n \in \mathbb{N}$  en  $h = \frac{b-a}{2n}$ . Dan kunnen we*

$$\int_a^b f(x) dx$$

benaderen met

$$S_h = \frac{1}{3}h (f(x_0) + 4f(t_1) + 2f(x_1) + 4f(t_2) + \dots + 2f(x_{n-1}) + 4f(t_n) + f(x_n)).$$

Hierbij is

$$x_0 = a, x_1 = a + 2h, x_2 = a + 4h, \dots, x_{n-1} = a + 2(n-1)h, x_n = a + 2nh = b$$

(we verdelen  $[a, b]$  dus in  $n$  subintervallen), en

$$t_1 = a + h, t_2 = a + 3h, \dots, t_n = a + (2n-1)h$$

(dus  $t_i$  is het middelpunt van  $[x_{i-1}, x_i]$ ).

We noemen  $h$  de *stapgrootte* van de Simpsonregel.

**Voorbeeld 5.6.4:** We gebruiken de Simpsonregel met  $h = \frac{1}{4}$  (en dus  $n = 2$ ) om  $\int_0^1 5x^4 dx$  te benaderen.

**Aldus:** Omdat  $n = 2$ , verdelen we het interval  $[0, 1]$  in twee subintervallen. We vinden  $x_0 = 0$ ,  $x_1 = \frac{1}{2}$  en  $x_2 = 1$ . Verder geldt dat  $t_1 = \frac{1}{4}$  en  $t_2 = \frac{3}{4}$ . De benadering wordt dus

$$\begin{aligned} S_{\frac{1}{4}} &= \frac{1}{3}h (f(0) + 4f(\frac{1}{4}) + 2f(\frac{1}{2}) + 4f(\frac{3}{4}) + f(1)) \\ &= \frac{1}{12}(0 + 4 \cdot \frac{5}{256} + 2 \cdot \frac{5}{16} + 4 \cdot \frac{405}{256} + 5) \\ &= 1,00260. \end{aligned}$$

De exacte waarde is 1. De benadering is dus niet slecht! (De trapeziumregel geeft (met  $h = \frac{1}{4}$ ) een benadering van 1.10352.) —

Ook bij de Simpsonregel wordt de fout van de benadering in het algemeen kleiner als de stap-grootte  $h$  afneemt. Net als bij de trapeziumregel bestaat er een stelling die aangeeft wat de fout maximaal is. Merk op dat de fout bij benadering van een integraal met de Simpsonregel, die we noteren met  $R_S$ , gegeven wordt door

$$R_S = \int_a^b f(x) dx - S_h.$$

**STELLING 5.6.6 (Nauwkeurigheid van de Simpsonregel)** Zij  $f$  een functie met continue vierde afgeleide op  $[a, b]$ . Laat  $M$  een bovengrens zijn van  $|f^{(4)}(x)|$  op  $[a, b]$ . Dan geldt

$$|R_S| = \left| \int_a^b f(x) dx - S_h \right| \leq \frac{b-a}{180} h^4 M.$$

Hierbij is  $S_h$  de formule uit stelling 5.6.5.

**Voorbeeld 5.6.5:** In voorbeeld 5.6.4 hebben we  $\int_0^1 5x^4 dx$  benaderd met de Simpsonregel voor  $h = \frac{1}{4}$ . We zullen nu berekenen wat de fout bij deze benadering maximaal is. Als we schrijven  $f(x) = 5x^4$ , dan volgt dat  $f^{(4)}(x) = 120$ . We nemen dus  $M = 120$ , zodat

$$\begin{aligned} |R_S| &\leq \frac{b-a}{180} h^4 M \\ &= \frac{1}{180} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^4 \cdot 120 \\ &= \frac{1}{384} < 0,00261. \end{aligned}$$

De fout is dus hooguit  $3 \cdot 10^{-3}$ . —

**Opmerking 1:** Als we de trapeziumregel en de Simpsonregel toepassen met *dezelfde* stapgrootte  $h$  vinden we voor de maximale fout bij de benadering met de trapeziumregel

$$|R_T| \leq \frac{b-a}{12} h^2 M,$$

waarbij  $M$  een bovengrens is voor de tweede afgeleide. Bij benadering met de Simpsonregel geldt

$$|R_S| \leq \frac{b-a}{180} h^4 M,$$

waarbij  $M$  een bovengrens is voor de vierde afgeleide. Over de  $M$  in beide afschattingen kunnen we weinig zeggen. Echter,  $h$  is in beide gevallen gelijk en  $b - a$  ook. De factor  $(b - a)/180$  is natuurlijk 15 keer zo klein als de factor  $(b - a)/12$ . Verder nemen we  $h$  in het algemeen klein, en voor kleine  $h$  geldt dat  $h^4$  véél kleiner is dan  $h^2$ . Neem bijvoorbeeld  $h = \frac{1}{5}$ . Dan  $h^2 = 0.04$  en  $h^4 = 0.0016$ . We zien dus dat de maximale fout, bij kleine stapgrootte, gemaakt met de Simpsonregel in het algemeen kleiner is dan de maximale fout gemaakt met de trapeziumregel. Het rekenwerk om de benadering te krijgen is echter gelijk! (We moeten in beide gevallen evenveel functiewaarden berekenen om de benadering te vinden.)

**Opmerking 2:** De (maximale) fout in de trapeziumregel hangt (na keuze van de functie en het integratieinterval) slechts af van  $h^2$ . We zeggen wel dat de fout van de orde  $h^2$  is. Als we stelling 5.6.2 iets beter analyseren zien we dat er ook het volgende staat: De maximale fout bij benadering van een integraal met de trapeziumregel is  $\mathcal{O}(h^2)$  (Zie §4.4, formule 4.5). Evenzo geldt: De maximale fout bij benadering van een integraal met de Simpsonregel is  $\mathcal{O}(h^4)$ . Ga na dat dit betekent dat geldt: Als de stapgrootte (bijvoorbeeld 4 keer zo klein genomen wordt, dan wordt de fout ongeveer  $4^4 = 256$  keer zo klein.

**Voorbeeld 5.6.6:** In voorbeeld 5.6.3 wilden we

$$\int_0^{\pi} \sin x^2 dx$$

m.b.v. de trapeziumregel schatten tot op 5 cijfers achter de komma. We vonden dat we  $n$  daarvoor ongeveer gelijk aan 5000 moesten nemen. De stapgrootte is dan  $\pi/5000$ . We gaan dit nu doen met de Simpsonregel. De fout moet weer liggen tussen  $-5 \cdot 10^{-6}$  en  $5 \cdot 10^{-6}$  en is dus maximaal  $5 \cdot 10^{-6}$ . De vraag is met welke stapgrootte we dit voor elkaar kunnen krijgen.

De maximale fout is  $\frac{b-a}{180} h^4 M$ , waarbij  $M$  een bovengrens voor  $f^{(4)}$  is. Als we er dus voor zorgen dat

$$\frac{b-a}{180} h^4 M < 5 \cdot 10^{-6},$$

weten we zeker dat de fout in de benadering wordt zoals gewenst.

We lossen dit op. In onze situatie is  $b = \pi$  en  $a = 0$ . Verder is  $M$  een bovengrens voor  $f^{(4)}(x)$  op het interval  $[0, \pi]$ . Nu is

$$f^{(4)}(x) = 16x^4 \sin x^2 - 48x^2 \cos x^2 - 12 \sin x^2.$$

We kunnen (eventueel m.b.v. van een computer) de grafiek van  $f^{(4)}(x)$  schetsen op  $[0, \pi]$  en inzien dat  $|f^{(4)}(x)| < 1200$  op  $[0, \pi]$ . We nemen dus  $M = 1200$ .

Merk verder op dat

$$h = \frac{b-a}{2n} = \frac{\pi}{2n}.$$

We moeten dus oplossen

$$\frac{b-a}{180} h^4 M = \frac{1200\pi^5}{180 \cdot 2^4 \cdot n^4} < 5 \cdot 10^{-6}.$$

Dit geldt als  $n \geq 72$ . Voor  $n = 72$  wordt de stapgrootte  $\pi/144$ . We hebben een stuk minder berekeningen nodig, dan met de trapeziumregel! (144 functiewaarden met de Simpsonregel tegen 5000 functiewaarden met de trapeziumregel.) —

### 5.6.3 Foutschattingen op een tweede manier

In de voorgaande paragrafen hebben we verteld hoe we een bovengrens voor de fout in de benadering van een integraal met de trapeziumregel of de Simpsonregel konden vinden. Een nadeel hierbij is dat we een bovengrens van  $f^{(2)}$  (trapeziumregel) of  $f^{(4)}$  (Simpsonregel) nodig hebben.

In deze paragraaf geven we een methode die dit probleem niet heeft. Een nadeel van deze methode is echter dat we slechts een *schatting* van de fout krijgen. Dit betekent dat de werkelijke fout best iets meer kan zijn dan wat we berekenen! De methode is gebaseerd op die van paragraaf 2.5 waar we geleerd hebben hoe we met een (beperkt) aantal termen van een rij een benadering konden geven voor de limiet en de convergentiefactor van die rij. Met de convergentiefactor konden we een schatting voor de fout geven.

In het geval van de benadering van een integraal gaan we in bovenstaande context als volgt te werk: We maken een rij benaderingen van de integraal door herhaald een numerieke methode toe te passen (bijv. de trapeziumregel of de Simpsonregel) waarbij de

stapgrootte telkens gehalveerd wordt. Uit de vorige paragrafen volgt dan dat de limiet van deze rij gelijk is aan de waarde van de integraal. Verder kan de volgende stelling bewezen worden:

**STELLING 5.6.7** *De rij die we verkrijgen door herhaald de trapeziumregel toe te passen waarbij de stapgrootte telkens gehalveerd wordt, heeft een convergentiefactor  $\frac{1}{4}$ . Bij toepassing van de Simpsonregel is de convergentiefactor  $\frac{1}{16}$ .*

**Opmerking 1:** Het bewijs van deze stelling valt buiten het bestek van deze cursus. Intuïtief is het wel in te zien. In de vorige paragrafen hebben we namelijk gezien dat bij halvering van de stapgrootte, de (maximale) fout bij benadering met de trapeziumregel ongeveer 4 keer zo klein wordt en bij de Simpsonregel ongeveer 16 keer zo klein. Dat betekent (in het geval van de Simpsonregel) dat de afstand van de  $k$ -de benadering tot de integraal ongeveer  $1/16$  is van de afstand van de  $(k-1)$ -de benadering tot de integraal, hetgeen betekent dat de convergentiefactor  $1/16$  is.

**Opmerking 2:** In de stelling hebben we niet vermeld dat bij toepassing van de trapeziumregel de tweede afgeleide en bij toepassing van de Simpsonregel de vierde afgeleide van de integrand continu moeten zijn.

We illustreren de gang van zaken aan de hand van het volgende voorbeeld.

**Voorbeeld 5.6.7:** In dit voorbeeld benaderen we

$$\ln 2 = \int_1^2 \frac{1}{x} dx$$

door de trapeziumregel vijf keer toe te passen waarbij we de stapgrootte telkens halveren. We krijgen dan vijf benaderingen  $T_1, \dots, T_5$ , waarvan de resultaten vermeld staan in tabel 5.1 Hieruit vinden we als schatting voor  $\ln 2$  de waarde 0.693208208269, want  $\ln 2$

$k$	$h$	$T_k$
1	0.5	0.708333333333
2	0.25	0.697023809524
3	0.125	0.694121850372
4	0.0625	0.693391202208
5	0.03125	0.693208208269

**Tabel 5.1:** Een benadering van  $\ln 2$  middels de trapeziumregel

is de limiet van de rij  $\langle T_k \rangle$ . Volgens stelling 2.5.5 geldt:

$$L - T_k \approx \frac{\rho}{1 - \rho} (T_k - T_{k-1}),$$

waarbij  $L = \ln 2$  en  $\rho$  de convergentiefactor is van de rij  $\langle T_k \rangle$ . Volgens bovenstaande stelling is de convergentiefactor gelijk aan  $1/4$  [hoe kan dat met de tabel gecontroleerd

worden?<sup>3</sup>], zodat

$$\ln 2 - T_5 \approx \frac{1}{3}(T_5 - T_4) = -0.0000609980. \quad (5.4)$$

Vermoedelijk is het antwoord  $\ln 2 \approx 0.693208208269$  dus goed tot op 3 à 4 cijfers achter de komma.

We kunnen nog de volgende “correctie” op onze schatting uitvoeren: Uit formule 5.4 volgt

$$\ln 2 = T_5 + (\ln 2 - T_5) \approx 0.693208208269 - 0.0000609980 = 0.6931472103$$

Ga na dat een rekenmachine geeft:  $\ln 2 \approx 0.6931472$ . We hebben door deze correctie op de schatting dus een fantastisch resultaat verkregen. —■

### OPGAVEN (bij §5.6)

d 39. Benader de integralen

$$\int_0^2 x \, dx, \quad \int_0^2 x^2 \, dx \quad \text{en} \quad \int_1^2 \frac{1}{x^2} \, dx$$

- (a) met de trapeziumregel, stapgrootte  $\frac{1}{2}$ ;
- (b) met de regel van Simpson, stapgrootte  $\frac{1}{2}$ .
- (c) Geef de exacte waarde van deze integralen.

d 40. Kunt u aangeven waarom bij de benaderingen in de vorige opgave de fouten van de eerste integraal in (a), en de eerste en de tweede integraal in (b) gelijk aan 0 zijn?

h 41. Bereken  $\int_1^3 (x^3 - 2x^2 + 4x - 3) \, dx$  met behulp van een primitieve en via de regel van Simpson. Wat merkt u op? Verklaar dit.

h 42. We willen met de regel van Simpson een schatting geven van  $\ln 2$ . We beschouwen daartoe

$$\int_1^2 \frac{1}{x} \, dx$$

en nemen een stapgrootte van  $\frac{1}{10}$ .

- (a) Geef een afschatting van de fout.
- (b) Geef een schatting van  $\ln 2$ . (Ter vergelijking:  $\ln 2 = 0,69314718\dots$ )

h 43. Beschouw de bepaalde integraal  $\frac{9}{\pi} \int_0^{\pi/4} \ln(\cos x) \, dx$ .

- (a) Geef een afschatting van de fout (uitgedrukt in  $n$ ), als we deze integraal met de trapeziumregel benaderen in  $n$  stappen.
- (b) Bepaal een waarde van  $n$ , zó dat de (maximale) fout van de benadering kleiner is dan  $10^{-3}$  en geef de bijbehorende benadering.
- (c) Beantwoord de vragen (a) en (b) voor het geval dat we de integraal benaderen met de regel van Simpson.

---

<sup>3</sup>Antwoord:  $\rho \approx \frac{T_5 - T_4}{T_4 - T_3} = 0.2504541857$

r 44. We willen een benadering geven van  $\pi$ . Daartoe benaderen we

$$\int_0^1 \frac{4}{x^2 + 1} dx$$

m.b.v. de trapeziumregel.

- Laat zien dat bovenstaande bepaalde integraal gelijk is aan  $\pi$ .
- Geef een aantal termen van de rij  $\langle T_k \rangle$  die verkregen wordt door de trapeziumregel herhaald toe te passen, waarbij we de stapgrootte steeds halveren. Begin met stapgrootte  $\frac{1}{2}$ .
- Wat is de convergentiefactor van deze rij. Controleer dit door een schatting van de convergentiefactor te geven met behulp van de rij uit (a).
- Geef m.b.v. (b) en (c) een schatting voor  $\pi$  en een schatting voor de daarbij gemaakte fout. Geef ook de gecorrigeerde benadering.

We gaan  $\pi$  nu zo benaderen, dat we zeker weten dat de fout hooguit  $10^{-6}$  is.

- Geef een bovengrens aan van

$$\left| \int_0^1 \frac{4}{x^2 + 1} dx - T_h \right|$$

(uitgedrukt in  $n$ ). Hierbij is  $h = \frac{b-a}{n}$ .

- Bepaal m.b.v. (e) een  $n$ , zodanig dat de fout bij schatting van  $\pi$  met  $T_h$  kleiner is dan  $10^{-6}$  en controleer uw antwoord ( $\pi = 3,1415927\dots$ ).

r 45. In opgave 38 hebben we gezien dat de omtrek van een ellips met vergelijking  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  gelijk is aan

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 + (b^2 - a^2) \cos \varphi} d\varphi.$$

Neem nu  $a = 1$  en  $b = 2$  en benader de omtrek van de ellips met een fout van hooguit  $10^{-6}$ .

r 46. Gegeven de integraal  $\int_0^{100} \sin x^2 dx$ . Laat  $\langle S_k \rangle$  de benaderingsrij zijn van deze integraal verkregen door de regel van Simpson herhaald toe te passen, waarbij we de stapgrootte steeds halveren.

- Bepaal de eerste 10 termen van deze rij als we beginnen met één stap en trek uw conclusies.
- Hoe vaak moeten we itereren opdat we de integraal met een fout van ongeveer  $10^{-6}$  benaderen?

r 47. Gegeven de oppervlaktefunctie

$$Si(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt,$$

die ook wel de "sinus-integraalfunctie" heet. Men kan bewijzen dat deze integraal niet uit te drukken is in de ons bekende standaardfuncties. Om waarden van deze functie te

vinden, zullen we dus moeten gaan benaderen. In deze opgave benaderen we  $Si(1)$  en doen dat middels de regel van Simpson.

(a) Waarom is de regel van Simpson niet direct toepasbaar?

We definiëren

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{als } x \neq 0 \\ 1 & \text{als } x = 0 \end{cases}$$

(b) Laat zien dat  $f(x)$  continu is (en dus integreerbaar).

Er geldt nu dat  $Si(x) = \int_0^x f(x) dx$ .

(c) (i) Bepaal  $f^{(4)}(x)$  voor  $x \neq 0$ .

(ii) Bepaal  $\lim_{x \rightarrow 0} f^{(4)}(x)$ . (Hint: Maak hierbij gebruik van Taylorpolynomen.)

(iii) Bepaal  $f^{(4)}(0)$ .

(iv) Laat nu zien dat  $f^{(4)}$  continu is in 0. Wat betekent dit voor de Simpsonregel?

Er geldt  $\int_0^1 \frac{\sin t}{t} dt = \int_0^a \frac{\sin t}{t} dt + \int_a^1 \frac{\sin t}{t} dt$ .

(d) Bepaal  $a$ , zó dat  $\int_0^a \frac{\sin t}{t} dt < 10^{-7}$  (maak een schets van  $\frac{\sin t}{t}$ ).

(e) Bepaal nu  $Si(1)$  met een onnauwkeurigheid die kleiner is dan  $10^{-6}$ .

## 5.7 Oneigenlijke integralen

Bij de definitie van de integraal hebben we geeist dat het integratieinterval gesloten en begrensd is en de integrand een begrensde functie. Als we één of beide eisen laten vallen, spreken we over een *oneigenlijke integraal*. In deze paragraaf zullen we bestuderen of er in dat geval nog iets zinvol te zeggen is.

### 5.7.1 De twee soorten oneigenlijke integralen

We beschouwen eerst de situatie waarin we een begrensde functie willen integreren over een onbegrensd interval, d.w.z. een interval van de vorm  $[a, \infty)$  of  $(-\infty, b]$ . Om hier zinvol over te kunnen spreken geven we de volgende definitie:

**Definitie:** Veronderstel dat de (begrensde) functie  $f$  met domein  $[a, \infty)$  integreerbaar is op ieder gesloten en begrensd interval van de vorm  $[a, b]$ . We zeggen dat de oneigenlijke integraal van  $f$  over  $[a, \infty)$  *convergeert* als

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx$$

bestaat. De oneigenlijke integraal

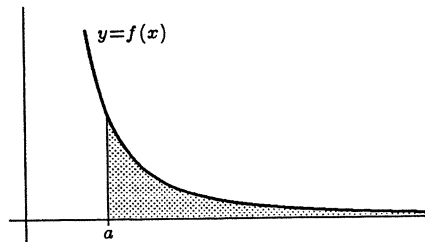
$$\int_a^\infty f(x) dx$$

is dan per definitie gelijk aan deze limiet. Als de limiet niet bestaat zeggen we dat de oneigenlijke integraal *divergeert* (of niet bestaat). Analoog voor functies op  $(-\infty, b]$ .

Intuitief stelt

$$\int_a^\infty f(x) dx$$

de oppervlakte voor van het onbegrensd gebied ingesloten door  $f$ , de  $x$ -as en de lijn  $x = a$  (zie figuur 5.30).



FIGUUR 5.30: Een onbegrensd integratieinterval

We schetsen de situatie aan de hand van de volgende voorbeelden:

**Voorbeeld 5.7.1:** Ga na of  $\int_0^\infty e^{-x} dx$  convergeert of divergeert.

**Aldus:** Er geldt:

$$\int_0^b e^{-x} dx = -e^{-x} \Big|_0^b = -e^{-b} + 1,$$

zodat

$$\int_0^\infty e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} (1 - e^{-b}) = 1,$$

waaruit volgt dat deze oneigenlijke integraal convergeert en gelijk is aan 1. —■

**Voorbeeld 5.7.2:** Toon aan dat  $\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx$  convergeert als  $\alpha > 1$  en divergeert als  $\alpha \leq 1$ .

**Aldus:** Voor  $\alpha \neq 1$  geldt:

$$\begin{aligned} \int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{1}{x^\alpha} dx \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{1-\alpha} \cdot \frac{1}{x^{\alpha-1}} \Big|_1^b \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{1-\alpha} \left( \frac{1}{b^{\alpha-1}} - 1 \right) \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{1-\alpha} (b^{1-\alpha} - 1) \end{aligned}$$

Nu is

$$\lim_{b \rightarrow \infty} b^{1-\alpha} = \begin{cases} 0 & \text{als } 1-\alpha < 0 \\ \infty & \text{als } 1-\alpha > 0 \end{cases}$$



We concluderen dat

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx = \begin{cases} \frac{1}{\alpha - 1} & \text{als } \alpha > 1 \\ \infty & \text{als } \alpha < 1 \end{cases}$$

Hiermee is het bewezen voor  $\alpha \neq 1$ . Ga zelf na dat de oneigenlijke integraal

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx$$

divergeert, waarmee het geval  $\alpha = 1$  behandeld is. —

We beschouwen nu de situatie waarin het interval wel begrensd is maar niet gesloten en de situatie dat het interval wel begrensd is, maar  $f$  niet. We kunnen bijvoorbeeld denken aan  $x \ln x$  over  $(0, 1]$ ,  $\tan x$  over  $[0, \frac{1}{2}\pi)$  of  $1/\sqrt{x}$  over  $(0, 1]$ . We geven de volgende definitie:

**Definitie:** Veronderstel dat de functie  $f$  met domein  $(a, b]$  integreerbaar is op ieder gesloten en begrensd interval van de vorm  $[c, b]$  met  $a < c < b$ . We zeggen dat de oneigenlijke integraal van  $f$  over  $(a, b]$  *convergeert* als

$$\lim_{c \downarrow a} \int_c^b f(x) dx$$

bestaat. De integraal

$$\int_a^b f(x) dx$$

is dan per definitie gelijk aan deze limiet. Als de limiet niet bestaat zeggen we dat de oneigenlijke integraal *divergeert* (of niet bestaat). Analoog voor functies op  $[a, b)$ .

Als  $f$  op een interval  $[a, b)$  onbegrensd is in de buurt van  $a$ , dan stelt

$$\int_a^{\infty} f(x) dx$$

intuïtief de oppervlakte voor van het onbegrensde gebied ingesloten door  $f$ , de  $x$ -as en de lijnen  $x = a$  en  $x = b$  (zie figuur 5.31).

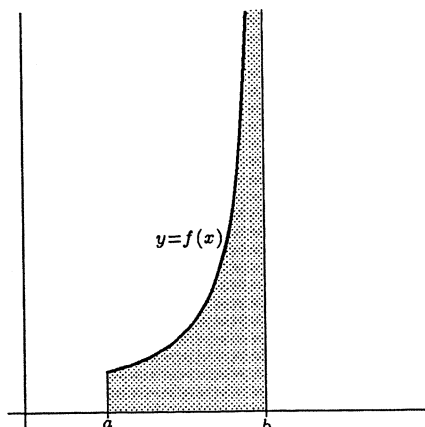
We illustreren dit aan de hand van een aantal voorbeelden:

**Voorbeeld 5.7.3:** We gaan na of

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \tan x dx$$

bestaat. Merk op dat  $\tan x$  onbegrensd is bij  $\frac{1}{2}\pi$  en dat de integraal dus oneigenlijk is bij  $\frac{1}{2}\pi$ . In feite gaat het hier om de oneigenlijke integraal van  $\tan x$  over  $[0, \frac{1}{2}\pi)$ . We passen de definitie toe:

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \tan x dx = \lim_{c \uparrow \frac{1}{2}\pi} \int_0^c \tan x dx$$



FIGUUR 5.31: Een onbegrenste functie op een begrensd interval

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{c \uparrow \frac{1}{2}\pi} -\ln |\cos x| \Big|_0^c \\
 &= \lim_{c \uparrow \frac{1}{2}\pi} (-\ln |\cos c| + \ln |\cos 0|) \\
 &= \lim_{c \uparrow \frac{1}{2}\pi} -\ln |\cos c| \\
 &= \infty
 \end{aligned}$$

De integraal is dus divergent (en bestaat derhalve niet). —■

**Opmerking :** Aan de notatie

$$\int_a^b f(x) dx$$

zien we niet of we met een oneigenlijke of een gewone integraal te maken hebben. In het vervolg moeten we dus altijd nagaan welke situatie zich voordoet!

**Voorbeeld 5.7.4:** Toon aan dat  $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx$  convergeert als  $\alpha < 1$  en divergeert als  $\alpha \geq 1$ .

**Aldus:** Merk op dat we voor  $\alpha \leq 0$  een gewone integraal hebben, die integreerbaar en derhalve convergent is. We kunnen ons dus beperken tot positieve  $\alpha$ . In dat geval is de functie oneigenlijk in 0. Als  $\alpha \neq 1$  geldt

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx &= \lim_{c \downarrow 0} \int_c^1 \frac{1}{x^\alpha} dx \\
 &= \lim_{c \downarrow 0} \frac{1}{1-\alpha} \cdot \frac{1}{x^{\alpha-1}} \Big|_c^1 \\
 &= \lim_{c \downarrow 0} \frac{1}{1-\alpha} \left( 1 - \frac{1}{c^{\alpha-1}} \right) \\
 &= \lim_{c \downarrow 0} \frac{1}{1-\alpha} (1 - c^{1-\alpha})
 \end{aligned}$$

Nu is

$$\lim_{c \downarrow 0} c^{1-\alpha} = \begin{cases} \infty & \text{als } 1 - \alpha < 0 \\ 0 & \text{als } 1 - \alpha > 0 \end{cases}$$

We concluderen dat

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx = \begin{cases} \infty & \text{als } \alpha > 1 \\ \frac{1}{1-\alpha} & \text{als } \alpha < 1 \end{cases}$$

Hiermee is het bewezen voor  $\alpha \neq 1$ . Ga zelf na dat de oneigenlijke integraal

$$\int_0^1 \frac{1}{x} dx$$

divergeert, waarmee het geval  $\alpha = 1$  behandeld is. —■

**Voorbeeld 5.7.5:** De integraal

$$\int_0^1 x \ln x dx$$

is oneigenlijk in 0 omdat de functie  $f(x) = x \ln x$  in 0 niet is gedefinieerd. De functie is echter wel begrensd op  $(0, 1]$ . Als we de functie in 0 een willekeurige waarde geven, krijgen we een (uitgebreide) begrensde functie  $f$ , gedefinieerd op het gesloten en begrensde interval  $[0, 1]$  die in hooguit één punt discontinu is (namelijk in 0). Met opmerking 1 op pagina 178 volgt dat deze functie integreerbaar is, waaruit direct volgt dat

$$\int_0^1 x \ln x dx$$

convergeert. We noemen dit type oneigenlijke integralen vaak *schijnbaar oneigenlijk*. Om de integraal echt te berekenen hebben we de limietovergang echter wel nodig (zie opgave 50). —■

**Opmerking :** Als de functie  $f$  op het interval  $[p, q]$  onbegrensd is bij  $x = a$ , waarbij  $a$  géén randpunt van het interval is, dan “knippen we het interval bij  $a$  in twee stukken” en integreren  $f$  (indien nodig) op de manier van bovenstaande definitie over  $[p, a)$  én over  $(a, q]$ . We spreken af dat de oorspronkelijke oneigenlijke integraal convergeert, als zowel de integraal van  $f$  over  $[p, a)$  als de integraal van  $f$  over  $(a, q]$  convergeert. Als tenminste één van deze integralen divergeert, zeggen we dat de oorspronkelijke integraal divergeert. We illustreren dit aan de hand van het volgende voorbeeld.

**Voorbeeld 5.7.6:** We beschouwen

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx.$$

De volgende redenering is *fout*:

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx = \ln |x| \Big|_{-1}^1 = 0,$$

omdat dit een oneigenlijke integraal is. De juiste redenering is de volgende: De functie  $f(x) = 1/x$  is onbegrensd bij 0, zodat de integraal in twee oneigenlijke integralen uiteenvalt:

$$\int_{-1}^0 \frac{1}{x} dx \quad \text{en} \quad \int_0^1 \frac{1}{x} dx.$$

We hebben al gezien dat de tweede integraal divergeert, zodat volgens eerder gemaakte afspraak de gegeven integraal divergeert. —■

### 5.7.2 Convergentiecriteria voor oneigenlijke integralen

Evansals gewone integralen, kunnen oneigenlijke integralen vaak niet berekend worden middels primitieven. In dat geval zullen de oneigenlijke integralen benaderd moeten worden. We zullen later zien dat we benaderingen van oneigenlijke integralen bepalen door een oneigenlijk gedeelte te verwaarlozen: We knippen in feite een lastig stukje van het integratieinterval af en benaderen de integraal op het overgebleven stuk. Dat heeft als gevolg dat we *vantevoren* moeten weten of de oneigenlijke integraal convergeert of divergeert. Bij divergentie heeft benaderen immers geen zin! In deze paragraaf geven we een tweetal criteria, waarmee (in veel gevallen) beslist kan worden of een oneigenlijke integraal convergeert dan wel divergeert. We formuleren de criteria alleen voor oneigenlijke integralen van het type

$$\int_a^\infty f(x) dx.$$

Ze gelden echter ook voor de andere typen oneigenlijke integralen!

We geven eerst het zogenaamde *majorantiecriterium* met als tegenhanger het *minorantiecriterium*. We zeggen met nadruk dat deze alleen gelden voor *niet-negatieve* functies.

**STELLING 5.7.1 (Majorantiecriterium)** *Te onderzoeken is de oneigenlijke integraal*

$$\int_a^\infty f(x) dx$$

met  $f(x) \geq 0$  op  $[a, \infty)$ . Als we een functie  $g$  kunnen vinden waarvoor geldt:

1.  $f(x) \leq g(x)$  op  $[a, \infty)$ ;
2.  $\int_a^\infty g(x) dx$  convergeert,

dan volgt dat  $\int_a^\infty f(x) dx$  ook convergeert.

In het geval van divergentie hebben we:

**STELLING 5.7.2 (Minorantiecriterium)** *Te onderzoeken is de oneigenlijke integraal*

$$\int_a^\infty f(x) dx$$

met  $f(x) \geq 0$  op  $[a, \infty)$ . Als we een functie  $g$  kunnen vinden waarvoor geldt:

1.  $g(x) \leq f(x)$ ;

2.  $\int_a^\infty g(x) dx$  *divergeert*,

dan volgt dat  $\int_a^\infty f(x) dx$  ook *divergeert*.

**Voorbeeld 5.7.7:** Ga na of  $\int_1^\infty \frac{1}{(x+2)(x+1)} dx$  convergeert.

**Aldus:** Merk op dat op  $[1, \infty)$  geldt dat  $1/(x+2)(x+1) \geq 0$ , zodat we het majorantie- of minorantiecriterium mogen toepassen. Omdat  $(x+1)(x+2) \geq x^2$ , volgt

$$\frac{1}{(x+2)(x+1)} \leq \frac{1}{x^2}.$$

In voorbeeld 5.7.2 hebben we gezien dat

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx$$

convergeert. Met het majorantiecriterium volgt nu dat

$$\int_1^\infty \frac{1}{(x+2)(x+1)} dx$$

ook convergeert. —

**Voorbeeld 5.7.8:** Ga na of  $\int_0^1 \frac{1}{\ln(x+1)} dx$  convergeert.

**Aldus:** De integraal is oneigenlijk in 0 en op  $(0, 1]$  geldt dat  $1/\ln(x+1) \geq 0$ , zodat we het majorantie- of minorantiecriterium mogen toepassen. Omdat  $\ln(x+1) \leq x$  op  $(0, 1]$ , volgt

$$\frac{1}{x} \leq \frac{1}{\ln(x+1)}.$$

In voorbeeld 5.7.4 hebben we gezien dat

$$\int_1^\infty \frac{1}{x} dx$$

divergeert. Met het minorantiecriterium volgt nu dat

$$\int_1^\infty \frac{1}{\ln(x+1)} dx$$

ook divergeert. —

Het volgende criterium is in feite een generalisatie van het majorantie- en het minorantiecriterium:

**STELLING 5.7.3 (Limietcriterium)** *Te onderzoeken is de oneigenlijke integraal*

$$\int_a^{\infty} f(x) dx$$

met  $f(x) \geq 0$  op  $[a, \infty)$ . Als we een functie  $g$  kunnen vinden waarvoor geldt:

1.  $g(x) > 0$  op  $[a, \infty)$ ;

2.  $L = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ ,

dan geldt:

- als  $L = 0$  en  $\int_a^{\infty} g(x) dx$  is convergent, dan is ook  $\int_a^{\infty} f(x) dx$  convergent;
- als  $L = \infty$  en  $\int_a^{\infty} g(x) dx$  is divergent, dan is ook  $\int_a^{\infty} f(x) dx$  divergent;
- als  $0 < L < \infty$  en  $\int_a^{\infty} g(x) dx$  is convergent, dan is ook  $\int_a^{\infty} f(x) dx$  convergent;
- als  $0 < L < \infty$  en  $\int_a^{\infty} g(x) dx$  is divergent, dan is ook  $\int_a^{\infty} f(x) dx$  divergent;

**Bewijs:** Als  $L = 0$  dan volgt dat  $f(x)/g(x) < 1$  voor grote  $x$ , en dus dat  $f(x) < g(x)$  voor grote  $x$ . Als  $\int_a^{\infty} g(x) dx$  convergeert, volgt het gestelde uit het majorantiecriterium.

Als  $L = \infty$  dan volgt dat  $f(x)/g(x) > 1$  voor grote  $x$ , en dus dat  $g(x) < f(x)$  voor grote  $x$ . Als  $\int_a^{\infty} g(x) dx$  divergeert, volgt het gestelde uit het minorantiecriterium.

Als  $0 < L < \infty$  dan volgt dat er een (eventueel klein getal)  $\epsilon > 0$  bestaat, zo dat

$$0 < L - \epsilon < f(x)/g(x) < L + \epsilon$$

voor grote  $x$ , en dus dat

$$g(x)(L - \epsilon) < f(x) < g(x)(L + \epsilon)$$

voor grote  $x$ . Als  $\int_a^{\infty} g(x) dx$  convergeert, dan convergeert  $\int_a^{\infty} g(x)(L + \epsilon) dx$  ook, en het gestelde volgt uit het minorantiecriterium. Idem in geval van divergentie van  $\int_a^{\infty} g(x) dx$ .

□

**Opmerking 1:** Als  $L = 0$  en  $\int_a^{\infty} g(x) dx$  divergeert, dan kunnen we geen conclusies trekken over het convergentiegedrag van  $\int_a^{\infty} f(x) dx$ .

Als  $L = \infty$  en  $\int_a^{\infty} g(x) dx$  convergeert, dan kunnen we geen conclusies trekken over het convergentiegedrag van  $\int_a^{\infty} f(x) dx$ .

**Opmerking 2:** De oneigenlijke integralen uit de voorbeelden 5.7.2 en 5.7.4 zijn vaak een goede keus voor de te zoeken functie  $g(x)$  uit de bovenstaande criteria.

**Voorbeeld 5.7.9:** Ga na of  $\int_2^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x^4 - 1}} dx$  convergeert.

**Aldus:** Merk op dat  $1/\sqrt{x^4 - 1} > 0$  op  $[2, \infty)$  en dat de integraal alleen oneigenlijk is in  $\infty$ . Voor grote  $x$  geldt dat

$$\frac{1}{\sqrt{x^4 - 1}} \approx \frac{1}{x^2}.$$

We proberen om die reden het limietkenmerk toe te passen met  $g(x) = 1/x^2$ . Er geldt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^4 - 1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{x^4}{x^4 - 1}} = 1.$$

Omdat  $\int_2^\infty \frac{1}{x^2} dx$  convergeert, volgt uit het limietcriterium dat de gegeven integraal ook convergeert. —

**Voorbeeld 5.7.10:** Ga na of  $\int_0^1 \frac{\sin x}{x\sqrt{x}} dx$  convergeert.

**Aldus:** De integraal is oneigenlijk in 0 en de integrand is op  $(0, 1]$  een positieve functie. We moeten om tot convergentie of divergentie te kunnen besluiten een functie  $g$  zoeken, waarmee we de integrand vergelijken. Hiertoe merken we op dat

$$\frac{\sin x}{x} \approx 1$$

als  $x$  nabij 0 gekozen wordt. Er volgt dat

$$\frac{\sin x}{x\sqrt{x}} \approx \frac{1}{\sqrt{x}}$$

voor  $x$  nabij 0. We proberen daarom het limietkenmerk met  $g(x) = 1/\sqrt{x}$ :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x} \sin x}{x\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Omdat  $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$  convergent is, is de gegeven integraal dit volgens het limietkenmerk ook. —

### 5.7.3 Oneigenlijke integralen numeriek

Bij het numeriek benaderen van een oneigenlijke integraal hebben we het probleem dat we de numerieke methoden (trapeziumregel, Simpsonregel) niet zonder meer kunnen toepassen. Bij deze methoden verdelen we het interval namelijk in een eindig aantal deelintervallen van gelijke lengte (de stapgrootte) en berekenen vervolgens per deelinterval een functiewaarde die we tenslotte allemaal optellen.

Het probleem bij een oneigenlijke integraal over een onbegrensd interval is dat we dit niet in eindig veel deelintervallen kunnen verdelen. Bij een oneigenlijke integraal over een functie die in een (meestal eind)punt van een begrensd interval niet gedefinieerd is, kunnen we dit punt niet in de benaderingsformule invullen.

Een oplossing voor deze problemen is het volgende: Knip het integratieinterval in twee stukken, waarbij de integraal over het ene stuk een gewone integraal wordt, terwijl de integraal over het andere stuk (waar de moeilijkheden in zitten) een hele kleine waarde

heeft, kleiner dan de gewenste nauwkeurigheid van de benadering. Uiteraard moeten we bij deze methoden wel weten dat we met een convergente oneigenlijke integraal te maken hebben, anders heeft benaderen helemaal geen zin omdat de integraal niet bestaat!

We zullen de bedoeling uitleggen aan de hand van een voorbeeld.

**Voorbeeld 5.7.11:** In opgave 52 hebben we aangetoond dat de oneigenlijke integraal

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$$

convergent is. We willen de integraal nu met (bijvoorbeeld) de Simpsonregel benaderen met een nauwkeurigheid van  $0.5 \cdot 10^{-5}$ . Omdat het integratieinterval onbegrensd is, knippen we dit in twee stukken:

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \int_0^A e^{-x^2} dx + \int_A^{\infty} e^{-x^2} dx.$$

Als we  $A$  nu zo kiezen dat

$$\int_A^{\infty} e^{-x^2} dx < 0.25 \cdot 10^{-5}$$

en vervolgens met de Simpsonregel een benadering  $I$  zoeken van

$$\int_0^A e^{-x^2} dx$$

met een nauwkeurigheid van  $0.25 \cdot 10^{-6}$ , dan is  $I$  de gezochte benadering. Immers: De nauwkeurigheid is

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx - I \right| &= \left| \int_0^A e^{-x^2} dx + \int_A^{\infty} e^{-x^2} dx - I \right| \\ &= \left| \left( \int_0^A e^{-x^2} dx - I \right) + \int_A^{\infty} e^{-x^2} dx \right| \\ &\leq \left| \int_0^A e^{-x^2} dx - I \right| + \left| \int_A^{\infty} e^{-x^2} dx \right| \\ &< 0.25 \cdot 10^{-5} + 0.25 \cdot 10^{-5} \\ &= 0.5 \cdot 10^{-5} \end{aligned}$$

Hierbij hebben we gebruik gemaakt van de driehoeksongelijkheid. Welnu,  $A$  is in dit geval als volgt te bepalen: Er geldt  $x^2 > x$  voor  $x > 1$ , dus  $e^{-x^2} < e^{-x}$  voor  $x > 1$ . Omdat we met positieve functies te maken hebben volgt hieruit dat

$$\int_A^{\infty} e^{-x^2} dx < \int_A^{\infty} e^{-x} dx = e^{-A}.$$

Als we  $A$  nu zo kiezen dat  $e^{-A} < 0.25 \cdot 10^{-5}$ , hebben we een geschikte  $A$ . Neem dus  $A > -\ln(0.25 \cdot 10^{-5}) \approx 12.9$ . Een goede keuze is  $A = 13$ . Met de methoden van §5.6 kunnen we

$$\int_0^{13} e^{-x^2} dx$$

vervolgens bepalen met de gewenste nauwkeurigheid van  $0.25 \cdot 10^{-5}$  (het resultaat is 0.8862269).



**Opmerking :** Aan de behandelde methode kunnen een aantal nadelen kleven:

- We kunnen geen geschikte majorant vinden om  $\int_A^\infty f(x) dx$  af te schatten en daarmee  $A$  te bepalen;
- Het interval  $[0, A]$  is zo groot, dat het aantal deelintervallen waarin we het moeten verdelen om de gewenste nauwkeurigheid te bereiken zo veel is, dat de numerieke benaderingsmethode te veel rekentijd gaat vergen.

In deze situaties kunnen geschikte substituties een oplossing bieden. Het kan zelfs zo zijn, dat door een substitutie een oneigenlijke integraal overgaat in een gewone integraal. In de opgaven geven we enige voorbeelden. Het zelf vinden van dit soort substituties valt buiten het bestek van deze cursus.

### OPGAVEN (bij §5.7)

d 48. Schrijf de volgende oneigenlijke integralen als limieten van bepaalde integralen.

(a)  $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx;$

(b)  $\int_0^\infty e^{-x^2} dx;$

(c)  $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx;$

(d)  $\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx;$

(e)  $\int_{-1}^\infty \frac{1}{(x-1)(x^2+x+4)} dx.$

h 49. Bereken in geval van convergentie de volgende integralen:

(a)  $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx;$

(b)  $\int_0^\infty x e^{-x^2} dx;$

(c)  $\int_2^\infty \frac{1}{2x \ln x} dx;$

(d)  $\int_2^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x^2-4}} dx.$

h 50. Bereken  $\int_0^1 x \ln x dx$ . Merk daarbij op dat  $\lim_{x \downarrow 0} x \ln x = 0$  (zie opgave 43).

h 51. Bereken

(a)  $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{|x|}} dx;$

(b)  $\int_{-2}^2 \frac{1}{(x^2+1) \arctan x} dx.$

h 52. Onderzoek of de volgende oneigenlijke integralen convergent of divergent zijn.

$$(a) \int_1^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x} + x + \sqrt{x}};$$

$$(b) \int_1^{\infty} \frac{dx}{x + \ln x};$$

$$(c) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\arctan x}{\sqrt{1+x^4}} dx;$$

$$(d) \int_2^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x} \ln^2 x};$$

$$(e) \int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x\sqrt{x}} dx;$$

$$(f) \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx.$$

h 53. Onderzoek of de volgende oneigenlijke integralen convergent of divergent zijn.

$$(a) \int_0^1 \frac{dx}{x\sqrt{x} + x + \sqrt{x}};$$

$$(b) \int_0^1 \frac{dx}{x - \ln x};$$

$$(c) \int_0^1 \frac{dx}{1 - \sqrt{x}};$$

$$(d) \int_0^1 \frac{dx}{\ln x}.$$

r 54. (a) Laat zien dat  $\int_1^{\infty} \frac{\arctan \sqrt{x}}{x^5} dx$  convergent is.

(b) Bepaal een getal  $A > 1$  zo dat  $\int_A^{\infty} \frac{\arctan \sqrt{x}}{x^5} dx < \frac{1}{2} \cdot 10^{-5}$ .

(c) Bepaal  $\int_1^{\infty} \frac{\arctan \sqrt{x}}{x^5} dx$  met een fout van maximaal  $10^{-5}$ .

## Hoofdstuk 6

# Krommen en oppervlakken in het platte vlak en de ruimte

In dit hoofdstuk willen we laten zien dat krommen en oppervlakken in het platte vlak en de ruimte op verschillende manieren wiskundig beschreven kunnen worden. Een centrale rol hierbij spelen (vectorwaardige) functies van meer veranderlijken.

Tot nu toe hebben we krommen meestal gezien als grafiek van een functie van één variabele. Er is geleerd hoe zo'n grafiek te tekenen is, nadat de functie is onderzocht. Echter, we hebben ook een andere manier gezien om een kromme te beschrijven, bijvoorbeeld de cirkel met middelpunt  $(0,0)$  en straal 1 voldoet aan  $x^2 + y^2 = 1$ . We geven de cirkel hier niet als grafiek van een functie, maar als vergelijking die het verband tussen de  $x$ - en de  $y$ -coördinaten van punten op de cirkel beschrijft. Een derde manier om krommen te beschrijven is middels een zogenaamde parametervoorstelling. Hiervan hebben we in §5.5.4 al een voorbeeld gezien. In §6.3 zullen we hier verder op in gaan.

Het is niet de bedoeling van dit hoofdstuk dat geleerd wordt hoe krommen en oppervlakken getekend moeten worden als een beschrijving gegeven is. Dat is in veel situaties namelijk een zeer lastige en vaak ondoenlijke zaak. Het gaat er veeleer om dat later aan een beschrijvende formule herkend kan worden of het over een oppervlak of een kromme gaat. Slechts in enkele relatief eenvoudige situaties moeten krommen en oppervlakken getekend worden, of moeten vanuit een plaatje wiskundige beschrijvingen gegeven worden.

### 6.1 Functies

In deze paragraaf gaan we na wat we precies bedoelen met een functie. Op het VWO is het begrip functie al aan de orde geweest. De precieze definitie is de volgende:

**Definitie:** Een *functie* is een voorschrift dat aan *elk* element van een gegeven verzameling  $D$  precies één element van een verzameling  $E$  toevoegt. Als we de functie  $f$  noemen, zeggen we wel dat  $f$  een functie van  $D$  naar  $E$  is. We noteren dit met

$$f : D \rightarrow E.$$

De verzameling  $D$  noemen we het *domein* van de functie  $f$  en de verzameling  $E$  het *codomein*. Als  $x$  een element van  $D$  is, dan noemen we het door  $f$  aan  $x$  toegevoegde

element van  $E$  het beeld van  $x$  onder  $f$ . Dit element van  $E$  noteren we met  $f(x)$ . De verzameling van alle beelden heet het bereik van  $f$ , vaak genoteerd met  $B_f$ .

Als  $y \in E$  het beeld van  $x$  is, dan noemen we  $x$  een *origineel* van  $y$ . Eén beeld kan meerdere originelen hebben. De verzameling van alle originelen van  $y$  wordt het *volledig origineel van  $y$  onder  $f$*  genoemd.

In het verleden hebben we voor  $D$  altijd (een deelverzameling van)  $\mathbb{R}$  genomen en voor  $E$  (stilzwijgend) heel  $\mathbb{R}$  (we spreken in dat geval van een *reëelwaardige functie van één variabele*. Reëelwaardig omdat de beelden altijd reëel zijn en “van één variabele” omdat de originelen uit  $\mathbb{R}$  komen). Echter, in bovenstaande definitie worden geen eisen gesteld aan de verzamelingen  $D$  en  $E$ . We kunnen hiervoor alles nemen wat in ons opkomt.

**Voorbeeld 6.1.1:** Laat  $D$  de verzameling artikelen zijn die verkocht worden in een zekere supermarkt. Laat  $E = \mathbb{Q}$ . Dan wordt door het voorschrift: “aan een element van  $D$  koppelen we de prijs van dat element” een functie  $f : D \rightarrow \mathbb{Q}$  gedefinieerd. Dit is zo, omdat elk artikel precies één prijs heeft, en we dus aan elk element van  $D$  precies één element van  $\mathbb{Q}$  toevoegen. Het volledig origineel van 1.55 bestaat uit alle artikelen die fl. 1.55 kosten. Wat is het volledig origineel van  $3\frac{1}{3}$ ? En van  $-2$ ?<sup>1</sup> Het beeld van een wit brood is de prijs hiervan. Het bereik van  $f$  bestaat uit alle prijzen van artikelen die in de winkel verkocht worden. —

Nu een wat serieuzer voorbeeld:

**Voorbeeld 6.1.2:** Het voorschrift  $g(x, y) = x^2 + y^2$  koppelt aan elk element van  $\mathbb{R}^2$  precies één element van  $\mathbb{R}$  en is derhalve een functie van  $\mathbb{R}^2$  naar  $\mathbb{R}$  (notatie:  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ). We noemen deze functie wel een reëelwaardige functie van twee variabelen. Het beeld van het punt  $(1, 3) \in \mathbb{R}^2$  is 10. Het volledig origineel van 10 bestaat uit alle punten op de cirkel  $x^2 + y^2 = 10$ . Het bereik is  $[0, \infty)$ . —

Als we het gegeven dat we de verzamelingen  $D$  en  $E$  uit de definitie min of meer vrij mogen kiezen in ogenschouw nemen, kunnen we de volgende opsomming geven:

- Als  $D \subset \mathbb{R}^n$ , dan heet een functie  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  een *reëelwaardige functie van  $n$  variabelen*. Als  $n \geq 2$  noteren we een origineel vaak met (een vetgedrukte)  $\mathbf{x}$  om aan te geven dat de originelen vectoren uit  $\mathbb{R}^n$  zijn.
- Als  $D \subset \mathbb{R}$ , dan heet een functie  $\mathbf{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^m$  met  $m \geq 2$ , een *vectorfunctie van één variabele*. De vetgedrukte  $\mathbf{f}$  geeft aan dat we met een vectorfunctie te maken hebben, en dus dat de beelden vectoren zijn.
- Als  $D \subset \mathbb{R}^n$ , dan heet een functie  $\mathbf{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^m$  met  $m \geq 1$  een *vectorfunctie van  $n$  variabelen*.

**Voorbeeld 6.1.3:** De functie  $\mathbf{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  gedefinieerd door

$$\mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t \end{bmatrix}$$

<sup>1</sup>Antwoord: In beide gevallen de lege verzameling.

is een vectorfunctie van één variabele. —■

**Voorbeeld 6.1.4:** De functie  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  gedefinieerd door

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(x, y, z) = \begin{bmatrix} x + y + z \\ xyz \end{bmatrix}$$

is een vectorfunctie van drie variabelen. —■

**Voorbeeld 6.1.5:** De functie  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  gedefinieerd door  $f(x, y) = e^{x^2+y^2}$  is een reëelwaardige functie van twee variabelen. —■

Functies van dit type komen in de praktijk erg veel voor: De baan van een deeltje is een functie van de tijd naar  $\mathbb{R}^2$  of  $\mathbb{R}^3$ . Op tijdstip  $t$  bevindt het deeltje zich op plaats  $(x(t), y(t), z(t))$ . Dit is een vectorfunctie van één variabele. Een ander voorbeeld is de temperatuurverdelingsfunctie van een bepaalde ruimte. Deze koppelt aan elk punt in de ruimte de temperatuur op een bepaald moment. Als we één vast tijdstip aanhouden is dit een reëelwaardige functie van drie variabelen (aan de plaats (drie coördinaten) wordt de temperatuur gekoppeld). Als we de tijd laten variëren wordt het een functie van vier variabelen:  $T(x, y, z, t)$  is de temperatuur op plaats  $(x, y, z)$  op tijdstip  $t$ . Er zijn nog vele voorbeelden te geven.

### OPGAVEN (bij §6.1)

- d 1. Geef bij de volgende functievoorschriften een maximaal domein  $D$  en bepaal het volledig origineel van het gegeven punt.
- (a)  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  met  $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}}$ ;  $y = 3$ ;
- (b)  $\mathbf{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^2$  met  $\mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} \sin t \\ \tan t \end{bmatrix}$ ;  $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ;
- (c)  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  met  $f(x, y) = \frac{x+y}{4x-2y}$ ;  $z = 2$ .
- d 2. Geef een zo groot mogelijk domein en bepaal het bereik van de volgende functies:
- (a)  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  met  $f(x) = \sqrt{|x^2 - 2|}$ ;
- (b)  $\mathbf{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^2$  met  $\mathbf{f}(x) = \begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t \end{bmatrix}$ ;
- (c)  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  met  $f(x, y) = e^{x+\frac{1}{y}}$ .

## 6.2 Grafieken van functies

We zijn gewend dat we reëelwaardige functies van één variabele grafisch kunnen weergeven met een grafiek van de functie. Hiertoe tekenen we een assenkruis. Langs de horizontale as zetten we de originelen (de elementen van het domein) uit. Langs de verticale as de elementen van het codomein, waarna we de punten  $(x, f(x))$  tekenen met  $x \in D$ . Op deze manier kunnen we grafisch originelen en beelden aflezen.

We vragen ons af of we ook grafieken kunnen tekenen van andere functies. Hiertoe moeten we eerst goed afspreken wat een grafiek is. Als we van bovenstaande strategie uitgaan, moeten we op één of andere manier de elementen van het domein uitzetten tegen de elementen van het codomein. Omdat we alleen plaatjes kunnen maken in het vlak of (met (zeer veel) meer moeite) in de ruimte, hebben we maar zeer weinig mogelijkheden. Daarom spreken we het volgende af: We spreken alleen over grafieken van reëelwaardige functies van één of twee veranderlijken. De *grafiek van een reëelwaardige functie*  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  van één veranderlijke (dus  $D \subset \mathbb{R}$ ) bestaat uit alle punten van de vorm  $(x, f(x))$ , waarbij  $x$  het domein van de functie doorloopt, in wiskundetaal is de grafiek dus de verzameling

$$\{(x, f(x)) \mid x \in D\}.$$

Deze grafiek “leeft” in  $\mathbb{R}^2$ , het platte vlak. Als de functie een beetje netjes is (bijvoorbeeld differentieerbaar), zal zijn grafiek een kromme zijn.

De *grafiek van een reëelwaardige functie*  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  van twee veranderlijken (dus  $D \subset \mathbb{R}^2$ ), bestaat uit alle punten van de vorm  $(x, y, f(x, y))$ , waarbij de punten  $(x, y)$  het domein van  $f$  doorlopen, in wiskundetaal is de grafiek dus de verzameling

$$\{(x, y, f(x, y)) \mid (x, y) \in D\}.$$

Deze grafiek “leeft” in  $\mathbb{R}^3$ , de ruimte.

**Opmerking 1:** We zouden, wiskundig gezien, de grafiek van een reëelwaardige functie  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  van drie variabelen (dus  $D \subset \mathbb{R}^3$ ) kunnen definiëren als de verzameling

$$\{(x, y, z, f(x, y, z)) \mid (x, y, z) \in D\}.$$

In de wiskundepraktijk gebeurt dit ook. We kunnen van deze verzameling punten echter geen plaatje tekenen, omdat de verzameling uit punten in  $\mathbb{R}^4$  bestaat.

**Opmerking 2:** Eventueel kunnen we ook de grafiek van een functie  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^2$  met  $D \subset \mathbb{R}$  definiëren als de verzameling punten

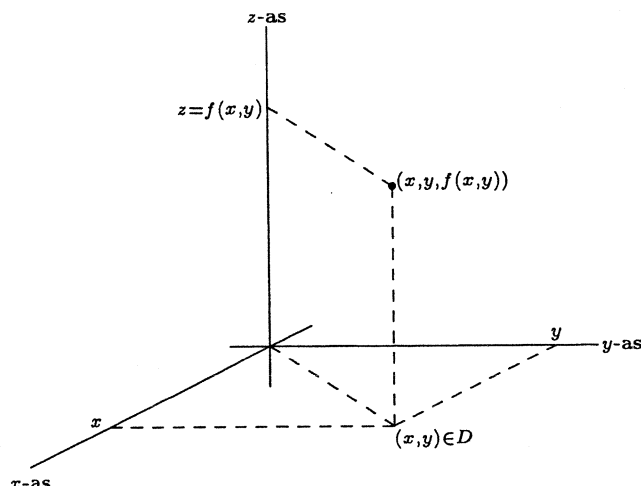
$$\{(x, f(x)) \mid x \in D\}.$$

Het is echter niet gebruikelijk over de grafiek van dit soort functies te spreken.

**Opmerking 3:** De grafiek van een reëelwaardige functie van één variabele heeft met een verticale lijn (dus een lijn met vergelijking  $x = \text{constant}$ ) *altijd* hooguit één snijpunt.

De grafiek van een reëelwaardige functie van twee variabelen heeft met een lijn loodrecht op het  $x$ - $y$ -vlak *altijd* hooguit één snijpunt.

Voor het tekenen van de grafiek van een functie van twee variabelen maken we gebruik van een assenstelsel van drie onderling loodrechte assen: De  $x$ -as, de  $y$ -as en de  $z$ -as. Punten uit het domein van de functie vinden we in het  $x$ - $y$ -vlak. De  $z$ -coördinaat van een punt  $(x, y, z)$  op de grafiek van  $f$  stelt het beeld  $f(x, y)$  voor (zie figuur 6.1). Het tekenen van de grafiek van een reëelwaardige functie van twee variabelen is met de hand vrijwel niet te doen, behalve in enkele eenvoudige (zie opgave 3) en speciale gevallen (zie



**FIGUUR 6.1:** Het tekenen van een punt  $(x, y, f(x, y))$

verderop). Met de huidige computers en vele softwarepakketten kunnen tegenwoordig echter fantastische resultaten verkregen worden. In figuur 6.2 hebben we met behulp van het computeralgebrapakket MAPLE de grafieken getekend van de functies

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \text{ met } f(x, y) = \frac{-4}{1 + x^2 + 2y^2}$$

en

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \text{ met } f(x, y) = 3 \cos x \sin y.$$

In het algemeen vormen de grafieken van reëelwaardige functies van twee variabelen een (gekromd) oppervlak in de ruimte.

Van een speciaal type reëelwaardige functie van twee variabelen is de grafiek betrekkelijk eenvoudig te tekenen. Dit zijn de functies  $f$  die we kunnen schrijven als functie van  $\sqrt{x^2 + y^2}$ , met andere woorden, als  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ , dan  $f(x, y) = g(r)$  voor één of andere functie  $g$  van één variabele.

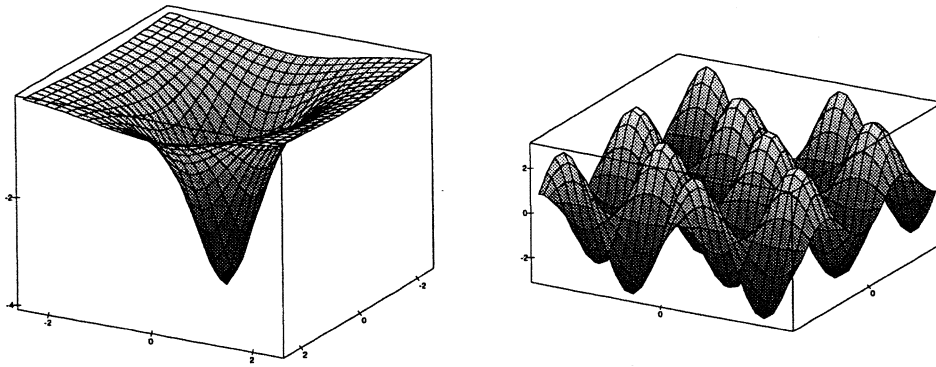
**Voorbeeld 6.2.1:** Als  $f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$ , dan kunnen we schrijven

$$f(x, y) = 1 - (\sqrt{x^2 + y^2})^2 = 1 - r^2 = g(r).$$

Als  $f(x, y) = \cos(\sqrt{x^2 + y^2})$ , dan kunnen we schrijven

$$f(x, y) = \cos(\sqrt{x^2 + y^2}) = \cos r = g(r).$$

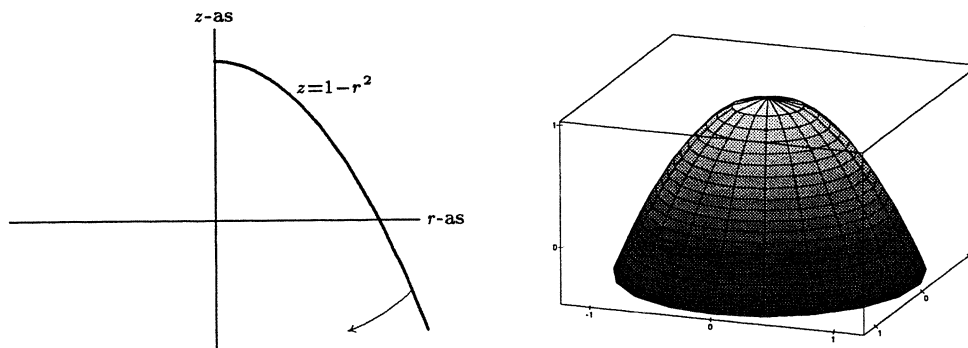
De grafieken van dit type functies zijn omwentelingsoppervlakken om de  $z$ -as. Dit is als volgt in te zien: Kies een punt  $(x, y)$  op de cirkel met middelpunt  $(0, 0)$  en straal  $r$ . Dan geldt  $\sqrt{x^2 + y^2} = r$  en dus is  $f(x, y) = g(r)$ . Blijkbaar is het beeld van elk punt op de



FIGUUR 6.2: De grafieken van de functies  $\frac{-4}{1+x^2+2y^2}$  en  $3 \cos x \sin y$

cirkel met straal  $r$  (en middelpunt de oorsprong) gelijk aan  $g(r)$ , en dus liggen al deze punten op dezelfde hoogte. Dit betekent dat we de grafiek van  $f$  kunnen vinden door de grafiek van  $z = g(r)$  (met  $r \geq 0$ ) om de  $z$ -as te wentelen.

**Voorbeeld 6.2.2:** De grafiek van de functie  $f$  met  $f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$  vinden we door de grafiek van  $z = 1 - r^2$ , met  $r \geq 0$ , om de  $z$ -as te wentelen (zie figuur 6.3). ▬



FIGUUR 6.3: Het tekenen van grafiek van  $f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$

### OPGAVEN (bij §6.2)

h 3. Schets de grafieken van de volgende functies:

- (a)  $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ ;
- (b)  $f(x, y) = 1 - x - y$ ;
- (c)  $f(x, y) = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$ ;
- (d)  $f(x, y) = \sin y$ .



- h 4. Geef een voorschrift van een functie  $f$  (inclusief domein en codomein) als de grafiek overeenkomt met
- een halve cilinder (in lengte-richting) met straal 4 en hoogte 20;
  - een halve bol met straal 10;
  - een halve kegel met straal 4 en hoogte 10;
  - een rechte lijn;
  - golfplaatdak van een fietsenstalling;
  - een eierdoos.
- t 5. Geef een voorschrift van een functie  $f$  (inclusief domein en codomein) als de grafiek overeenkomt met een halve kegel waarvan de hoogte 12 is en het grondvlak een ellips is die gegeven wordt door  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$ .

### 6.3 Parametriseringen van krommen

In de vorige paragraaf hebben we gezien dat de grafiek van een reëelwaardige functie van één variabele i.h.a. een kromme in het platte vlak oplevert. Echter, er zijn zeer vele krommen in het platte vlak die niet geïnterpreteerd kunnen worden als grafiek van een functie. Een voorbeeld is een cirkel [Waarom?]. Verder zullen krommen in de ruimte ook geen grafieken van reëelwaardige functies van één of twee variabelen zijn. In deze paragraaf zullen we een manier geven om deze krommen wiskundig te beschrijven. Deze manier is goed te begrijpen als we de kromme fysisch interpreteren als de baan van een voorwerp: In het geval van een baan (kromme) in het platte vlak bevindt het voorwerp zich op tijdstip  $t$  in het punt  $(x(t), y(t))$ . Dit levert een beschrijving van de kromme.

**Voorbeeld 6.3.1:** Als een voorwerp zich op tijdstip  $t$  bevindt in het punt  $(x(t), y(t))$  met  $x(t) = \cos t$  en  $y(t) = \sin t$ , dan beschrijft het voorwerp een cirkel met middelpunt  $(0, 0)$  en straal 1. Als de tijd loopt van 0 tot  $\pi$ , dan is de baan een halve cirkel en als de tijd loopt van  $-\pi$  tot  $4\pi$ , dan doorloopt het voorwerp de cirkel twee en een halve keer. —

Als we een kromme op deze manier beschrijven zeggen we dat we de kromme parametriseren. De eigenlijke beschrijving heet dan een *parametervoorstelling* van die kromme. De veranderlijke die in de beschrijving voorkomt heet de *parameter*. Een kromme in het platte vlak wordt dan dus beschreven met een functie  $\mathbf{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^2$  ( $D \subset \mathbb{R}$ ), meestal geschreven in de vorm

$$\mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \quad (t \in D)$$

Een kromme in  $\mathbb{R}^3$  beschrijven we met een functie  $\mathbf{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$  ( $D \subset \mathbb{R}$ ):

$$\mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} \quad (t \in D)$$

<sup>2</sup>Antwoord: Omdat er verticale lijnen zijn die de cirkel in twee punten snijden, en dat is bij een functie onmogelijk.

**Voorbeeld 6.3.2:** De parametervoorstelling

$$\mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix} \quad (t \in [0, 2\pi])$$

beschrijft de eenheidscirkel met middelpunt  $(0,0)$ , waarbij de cirkel één keer doorlopen wordt. —■

Let op: De krommen zijn in dit geval *niet* de grafieken van bovenstaande functies. Het zijn de beelden!

Veel figuren kunnen makkelijker in *poolcoördinaten* beschreven worden dan in de gebruikelijke  $x$ - $y$ -coördinaten (die ook wel *rechthoekscoördinaten* genoemd worden). We zijn poolcoördinaten al tegengekomen bij de complexe getallen (§1.3.2). De poolcoördinaten van een punt in het vlak zijn de getallen  $r \geq 0$  en  $\varphi$  die respectievelijk de afstand van het betreffende punt tot de oorsprong en de hoek van de plaatsvector van dat punt met de positieve  $x$ -as aanduiden. Het verband tussen de poolcoördinaten  $(r, \varphi)$  en de rechthoekscoördinaten  $(x, y)$  van een punt wordt gegeven door

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi & \text{en} & & r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ y &= r \sin \varphi & & & \cos \varphi &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ & & & & \sin \varphi &= \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{aligned} \quad (6.1)$$

Aan de hand van de volgende twee voorbeelden laten we zien dat krommen die om de oorsprong draaien vaak veel gemakkelijker in poolcoördinaten zijn te beschrijven.

**Voorbeeld 6.3.3:** Een parametervoorstelling van de cirkel met straal 1 en middelpunt de oorsprong is in rechthoekscoördinaten

$$\mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix} \quad (t \in [0, 2\pi])$$

Omdat  $x = 1 \cdot \cos t$  en  $y = 1 \cdot \sin t$  volgt met (6.1) dat in poolcoördinaten geldt

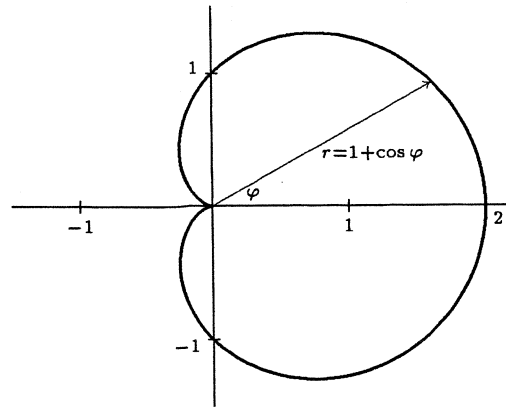
$$\begin{bmatrix} r(t) \\ \varphi(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ t \end{bmatrix} \quad (t \in [0, 2\pi])$$

Dit schrijven we kortweg als  $r = 1$ , met  $\varphi \in [0, 2\pi]$ . —■

**Voorbeeld 6.3.4:** De kromme  $k$  met parametervoorstelling

$$\mathbf{k}(t) = \begin{bmatrix} (1 + \cos t) \cos t \\ (1 + \cos t) \sin t \end{bmatrix} \quad (t \in [0, 2\pi])$$

is getekend in figuur 6.4. Deze kromme heet de *cardioïde*. Dat de kromme deze vorm



FIGUUR 6.4: De cardioïde

heeft, is goed in te zien door over te gaan op poolcoördinaten. Er geldt dan namelijk

$$\begin{bmatrix} r(t) \\ \varphi(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \cos t \\ t \end{bmatrix} \quad (t \in [0, 2\pi]) \quad \text{Lengte 8}$$

(dit volgt uit (6.1) en het feit dat  $x(t) = (1 + \cos t) \cos t$  en  $y(t) = (1 + \cos t) \sin t$ ). We schrijven kortweg  $r(\varphi) = 1 + \cos \varphi$  met  $\varphi \in [0, 2\pi]$ . Uit de laatste beschrijving kunnen we zien dat dat  $r$  bij een hoek van 0 radialen gelijk is aan 2, bij een hoek van  $\frac{1}{2}\pi$  gelijk is aan 1 en bij een hoek van  $\pi$  radialen gelijk is aan 0. Tijdens de verandering van de hoek  $\varphi$  van 0 tot  $\pi$  neemt  $r = 1 + \cos \varphi$  langzaam af van 2 tot 0. Dit verklaart de bovenste helft van de cardioïde. Op dezelfde manier kan de onderste helft verklaart worden. —

### OPGAVEN (bij §6.3)

- d 6. Schets de krommen waarvan de parametervoorstellingen gegeven zijn door:
- $(x(t), y(t)) = (t^2, t^2)$ , met  $t \in [-2, 2]$ ;
  - $(x(t), y(t)) = (2 \cos t - 1, 2 \sin t + 2)$ , met  $t \in [0, 2\pi]$ ;
  - $(x(t), y(t), z(t)) = (\cos t, \sin t, t/\pi)$ , met  $t \in [0, 4\pi]$ ;
  - $(r(t), \varphi(t)) = (t, t)$  met  $t \in [0, 4\pi]$ ;
  - $(x(t), y(t)) = (e^t \cos t, e^t \sin t)$ , met  $t \in [-2\pi, 2\pi]$ .
- h 7. Geef een parametervoorstelling van de volgende krommen:
- De cirkel met middelpunt  $(a, b)$  en straal  $r$ ;
  - De ellips met vergelijking  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > 0$  en  $b > 0$ );
  - De baan die een punt  $P$  op een cirkel met straal 1 aflegt, als we de cirkel vanaf tijdstip  $t = 0$  over de  $x$ -as rollen. Op tijdstip 0 bevindt  $P$  zich in de oorsprong en is  $(0, 1)$  het middelpunt van de cirkel. [Deze kromme wordt de *cycloïde* genoemd.]

- h 8. Schets de kromme met parametervoorstelling
- $(x(t), y(t)) = (\cos t, \sin 2t)$ , met  $t \in [0, 2\pi]$ ;
  - $(x(t), y(t)) = (\cos t, \sin 3t)$ , met  $t \in [0, 2\pi]$ .
- d 9. Van de grafiek van een functie  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  van één variabele is ook een parametervoorstelling te geven. Doe dit als geldt
- $f(x) = x^2$  en  $D = \mathbb{R}$ ;
  - $f(x) = \sin x$  en  $D = [0, 2\pi]$ ;
  - $f(x) = |x|$  en  $D = [-2, 2]$ .
  - Geef een algemene formule voor een parametervoorstelling van de grafiek van een functie  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  als  $D \subset \mathbb{R}$ .
- t 10. Bij eenzelfde kromme zijn altijd verschillende parametervoorstellingen mogelijk. Gegeven is de kromme  $k$  met parametervoorstelling

$$k(t) = \begin{bmatrix} t^2 - 1 \\ t \end{bmatrix} \quad (t \in [-2, 2]).$$

We zullen nog twee parametervoorstellingen voor deze kromme geven.

- Teken  $k$ .

We kunnen  $k$  beschouwen als de baan die een deeltje beschrijft van tijdstip  $-2$  tot tijdstip  $2$ .

- Een tweede deeltje beschrijft dezelfde baan  $k$ , maar is een tijdseenheid later. Dit deeltje doorloopt de baan dus van tijdstip  $-1$  tot tijdstip  $3$ . Geef een parametervoorstelling van de baan voor dit deeltje.
- Een derde deeltje doorloopt de baan twee keer zo snel, en wel van tijdstip  $0$  tot tijdstip  $2$ . Geef een parametervoorstelling.

- h 11. Geef van de volgende krommen een beschrijving in poolcoördinaten (d.w.z. geef  $r(t)$  en  $\varphi(t)$ ):
- een cirkel met straal  $R$ ;
  - een halfrechte door  $O$ ;
  - de lijn  $x = 3$ .

- t 12. Laat  $\kappa$  een kromme zijn die in poolcoördinaten gegeven wordt door  $\mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} r(t) \\ \varphi(t) \end{bmatrix}$ . We nemen aan dat  $\kappa$  eenduidig gedefinieerd is op  $[a, b]$ .

- Geef de beschrijving van  $\kappa$  in rechthoekskoördinaten (d.w.z. geef  $x(t)$  en  $y(t)$ ).
- Geef de formule van de booglengte van  $\kappa$  uitgedrukt in  $x(t)$  en  $y(t)$  (zie opgave 37 van §5.5).
- Laat zien dat de booglengte van  $\kappa$  gegeven wordt door

$$\int_a^b \sqrt{(r'(t))^2 + (r(t))^2(\varphi'(t))^2} dt.$$

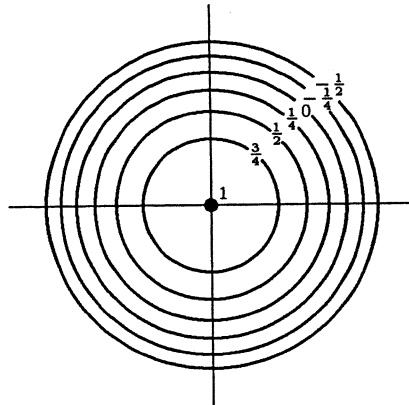
- Bepaal de omtrek van de cardioïde uit voorbeeld 6.3.4.

## 6.4 Vergelijkingen van krommen en oppervlakken

In §6.2 hebben gezien hoe grafieken van reëelwaardige functies van twee variabelen eruit zien: Het zijn oppervlakken in de  $\mathbb{R}^3$ . In het algemeen zijn dit soort oppervlakken erg lastig te tekenen. Om toch een idee te krijgen van de vorm van het oppervlak kan een hoogtelijnenplaatje een rol spelen. Een hoogtelijnenplaatje is in feite een tekening van het domein van de functie, waarin punten die in de grafiek gelijke hoogte hebben verbonden zijn:

**Definitie:** Zij  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  met  $D \subset \mathbb{R}^2$  een functie van twee variabelen. De verzameling punten van  $D$  waarvoor geldt dat  $f(x, y) = c$  voor een vaste waarde  $c$  vormen een *hoogtelijn* of *niveaukromme* van  $f$ .

**Voorbeeld 6.4.1:** De functie  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definiëren we door  $f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$ . Voor de hoogtelijn bij hoogte 0 geldt  $f(x, y) = 0$ , dus  $x^2 + y^2 = 1$ . Voor de hoogtelijn bij hoogte 1 geldt  $f(x, y) = 1$ , dus  $x^2 + y^2 = 0$ . Deze hoogtelijn bestaat uit slechts één punt! Ga na dat voor  $c < 1$  de hoogtelijnen allemaal cirkels zijn en dat er voor  $c > 1$  geen hoogtelijnen zijn. In figuur 6.5 hebben we een aantal hoogtelijnen getekend. Hiermee kunnen we een



**FIGUUR 6.5:** Niveaukrommen bij de functie  $f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$

goed beeld van de grafiek krijgen (deze hebben we al gezien in figuur 6.3). Wat betekent het als de niveaukrommen dicht bij elkaar liggen?<sup>3</sup> —■

Merk op dat de hoogtelijnen in het domein van de functie liggen en dat ze niet de grafiek van  $f$  vormen!

Het idee van niveaukrommen, geeft ons een nieuwe manier om krommen te beschrijven: Door een formule van de vorm  $f(x, y) = c$  worden alle punten  $(x, y)$  uit het domein van  $f$  verbonden, die in de grafiek van  $f$  op gelijke hoogte liggen (namelijk op hoogte  $c$ ). In het algemeen zullen deze punten een kromme in het domein (en dus in het vlak) vormen. Een voorbeeld is de formule voor de cirkel

$$x^2 + y^2 = 3.$$

<sup>3</sup>Antwoord: De grafiek loopt dan erg steil.

Deze is te interpreteren als de niveaukromme bij de functie  $f(x, y) = x^2 + y^2$  op hoogte 3, of als de niveaukromme bij de functie  $f(x, y) = x^2 + y^2 - 3$  bij hoogte nul.

Krommen in het platte vlak worden zeer vaak door dit soort formules gegeven. We zeggen dan dat we de kromme met een *vergelijking* beschreven hebben. Om te benadrukken dat de kromme hier niet als grafiek van een functie beschreven is, zeggen we wel dat de kromme *impliciet* gedefiniëerd is. Als de kromme als grafiek van een functie van één variabele ( $y = f(x)$ ) beschreven is, zeggen we wel dat de kromme *expliciet* als functie van  $x$  gegeven is. Soms kunnen we een kromme die door een vergelijking gegeven is, ook expliciet als een functie van  $x$  (of  $y$ ) beschrijven.

In het algemeen is het tekenen van impliciet gegeven krommen een lastig karwei.

**Voorbeeld 6.4.2:** We zoeken een vergelijking voor de cardioïde. Deze voldoet (in poolcoördinaten) aan  $r = 1 + \cos \varphi$ , ofwel  $r^2 = r + r \cos t$ . Omdat  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  en  $x = r \cos \varphi$ , volgt voor de cardioïde

$$x^2 + y^2 = \sqrt{x^2 + y^2} + x.$$

Als we  $x$  naar de het linkerlid overbrengen en vervolgens kwadrateren krijgen we

$$(x^2 + y^2 - x)^2 = x^2 + y^2.$$

Dit is een vergelijking voor de cardioïde. [Geef een functie waarvan de cardioïde een niveaukromme is<sup>4</sup>.] —

**Voorbeeld 6.4.3:** De vergelijking  $x^2 - y^2 = 0$  is een impliciete beschrijving van de “kromme” die wordt gevormd door de lijnen  $y = x$  en  $y = -x$ . —

**Voorbeeld 6.4.4:** Een impliciete beschrijving voor de grafiek van de functie  $f(x) = x^2$  wordt bijvoorbeeld gegeven door  $y - x^2 = 0$ . Verder heeft de kromme met vergelijking  $xy = 1$  een expliciete beschrijving, namelijk  $y = \frac{1}{x}$ . Deze kromme is dus de grafiek van de functie  $f(x) = \frac{1}{x}$ . —

Ook oppervlakken in de ruimte kunnen vaak met een vergelijking beschreven worden. Dat zijn namelijk *niveauoppervlakken* van functies  $f$  van 3 variabelen. Ze verbinden alle punten  $(x, y, z)$  in het domein van  $f$ , die hetzelfde beeld hebben. Ze voldoen dus aan

$$f(x, y, z) = c.$$

**Voorbeeld 6.4.5:** Een bol met straal  $r$  en middelpunt  $(0, 0, 0)$  voldoet aan de vergelijking  $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ . —

**Voorbeeld 6.4.6:** Het oppervlak uit figuur 6.2 voldoet aan  $z(1 + x^2 + 2y^2) = -4$ . —

We vatten nog even samen: Krommen in het platte vlak kunnen we beschrijven met een parametervoorstelling of impliciet als vergelijking (ofwel als niveaukromme van een

<sup>4</sup>Antwoord: Bijvoorbeeld de functie  $f(x, y) = (x^2 + y^2 - x)^2 - x^2 - y^2$ .

functie van twee variabelen:  $f(x, y) = c$ . In uitzonderlijke gevallen kan een kromme gezien worden als de grafiek van een functie  $g$  van één variabele (in dat geval is  $y = g(x)$  een expliciete beschrijving van de kromme).

Krommen in de ruimte kunnen we slechts beschrijven middels een parametervoorstelling. [Waarom?]<sup>5</sup>

Oppervlakken kunnen we impliciet schrijven in de vorm  $f(x, y, z) = c$  en in uitzonderlijke gevallen expliciet in de vorm  $z = g(x, y)$ . In het laatste geval is het oppervlak de grafiek van de functie  $g$ . We merken nog op dat we oppervlakken ook kunnen parametriseren. We gaan hier echter niet op in.

### OPGAVEN (bij §6.4)

- h 13. Op  $\mathbb{R}^2$  definiëren we de functie  $f(x, y) = x^2y$ .
- Bepaal de oplossingen van de vergelijking  $x^2y = 0$ , d.w.z. bepaal de elementen van de verzameling  $\{(x, y) \mid x^2y = 0\}$ .
  - Beschrijf de snijfiguren van de grafiek met de vlakken  $y = a$  met  $a \in \mathbb{R}$ .
  - Beschrijf de grafiek van  $f$ .
- h 14. Op  $\mathbb{R}^2$  definiëren we de functie  $f(x, y) = x^2 - y^2$ .
- Teken de niveaukrommen  $f(x, y) = c$  voor  $c = 0, \pm 1, \pm 2$ . Deze krommen worden hyperbolen genoemd.
  - Bepaal de snijfiguren van de grafiek met het  $x$ - $z$ -vlak en het  $y$ - $z$ -vlak.
  - Beschrijf de grafiek van  $f$ .
- h 15. Geef het voorschrift van de functies waarvan de grafieken uit de vorige opgaven niveauoppervlakken zijn.
- h 16. (a) Gegeven is het niveauoppervlak

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

waarbij  $a$ ,  $b$  en  $c$  positieve reële getallen zijn. We onderzoeken dit oppervlak:

- Beschrijf de snijfiguren van dit oppervlak met de vlakken  $x = a_1$ ,  $y = b_1$  en  $z = c_1$  waarbij  $a_1$ ,  $b_1$  en  $c_1$  positieve reële constanten zijn.
  - Beschrijf het oppervlak. (Dit oppervlak wordt een ellipsoïde genoemd.)
- (b) Gegeven is de éénbladige hyperboloïde welke gedefinieerd wordt door

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

waarbij  $a$ ,  $b$  en  $c$  positieve reële constanten zijn. Onderzoek en beschrijf dit oppervlak op de manier van onderdeel (a).

<sup>5</sup>Omdat  $f(x, y) = c$  de punten in het domein van  $f$  verbindt die dezelfde beelden hebben. De kromme "leeft" dus in het domein van  $f$  en dat is (een deel van) het vlak.

- (c) Gegeven is de twee-bladige hyperboloïde welke gedefinieerd wordt door

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Onderzoek en beschrijf dit oppervlak (verklaar het bijvoeglijknaamwoord tweebladig).

- (d) Onderzoek en beschrijf de elliptische kegel welke gedefinieerd wordt door de vergelijking  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ .

- (e) Onderzoek en beschrijf de elliptische paraboloiden waarvan de vergelijking gegeven wordt door  $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ .

- (f) Onderzoek en beschrijf hyperbolische paraboloiden met vergelijking  $z = \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2}$ .

- t 17. Een kwadratisch oppervlak in de ruimte is een oppervlak welke gedefinieerd wordt door de vergelijking  $Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0$ . De oppervlakken in de vorige opgave zijn de zogenaamde basistypen, d.w.z. elk kwadratisch oppervlak is na kantelen schuiven en/of spiegelen op bovenstaande typen te herleiden. Klassificeer de volgende oppervlakken:

- (a)  $4x^2 - 3y^2 + 12z^2 + 12 = 0$   
 (b)  $x^2 + 2y^2 + z^2 - 4x + 4y - 2z + 3 = 0$  en  
 (c)  $4x^2 + y^2 - 4z^2 - 16x - 6y - 16z = 9$ .

## 6.5 Partiële afgeleide van functies van meerdere variabelen

Alvorens we verder gaan met de integratie-theorie van functies van meerdere variabelen in hoofdstuk 7 willen we nog aandacht schenken aan het begrip partiële afgeleide van een functie van meerdere variabelen. In de toepassingen van functies van meerdere variabelen rijst vaak de volgende vraag op: Hoe wordt de functie-waarde beïnvloed als we één van z'n onafhankelijke variabelen veranderen?

De luchtdruk  $p$  in de atmosfeer rondom de aarde hangt af van de hoogte  $h$  t.o.v. van het aardoppervlak en de temperatuur  $t$ . Om de afhankelijkheid van  $p$  en  $h$  te onderzoeken zal een experimentator op verschillende hoogten bij gelijke  $t$  de druk meten. Opeenzelfde wijze zal hij de afhankelijkheid van  $p$  van  $t$  onderzoeken.

Op een soortgelijke wijze kunnen we de afhankelijkheid van een functie  $f$  van meerdere variabelen van een zekere onafhankelijke variabele, zeg  $x$ , onderzoeken door het voorschrift van  $f$  te "gewoon" differentiëren naar  $x$  waarbij we de andere onafhankelijke variabelen als constanten beschouwen. Deze manier van differentiëren wordt *partieel differentiëren* genoemd.

**Definitie:** Gegeven is een functie  $f$  van twee variabelen  $x$  en  $y$ . Onder de *eerste partiële afgeleide van  $f$  naar  $x$*  verstaan we de functies  $f_x$ , die gedefinieerd wordt door

$$f_x(x, y) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}.$$



Onder de *eerste partiële afgeleide van  $f$  naar  $y$*  verstaan we de functies  $f_y$ , die gedefinieerd wordt door

$$f_y(x, y) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

mits deze limieten bestaan. Uit deze definitie maken we op dat als het voorschrift  $f(x, y)$  gegeven is, we  $f_x(x, y)$  en  $f_y(x, y)$  kunnen bepalen door  $x$  respectievelijk  $y$  in  $f(x, y)$  als constant te beschouwen en het voorschrift “gewoon” te differentiëren naar  $x$  respectievelijk  $y$ .

**Voorbeeld 6.5.1:** Gegeven is de functie  $f(x, y) = xe^{x^2y}$ . De partiële afgeleide  $f_x$  van  $f$  naar  $x$  wordt gegeven door

$$f_x(x, y) = xe^{x^2y}(2xy) + e^{x^2y}$$

en de partiële afgeleide  $f_y$  van  $f$  naar  $y$  door

$$f_y(x, y) = x^3e^{x^2y}.$$

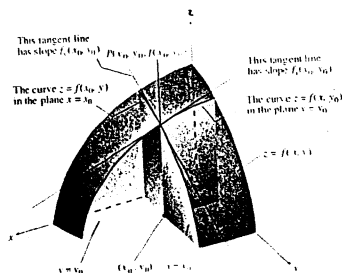
**Opmerking 1:** De eerste partiële afgeleiden van een functie  $f$  naar  $x$  en  $y$  worden vaak ook genoteerd als respectievelijk

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \quad \text{en} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y).$$

**Voorbeeld 6.5.2:** Zo is  $\frac{\partial}{\partial x}(\sin(xy)) = y \cos(xy)$  en  $\frac{\partial}{\partial y}(\sin(xy)) = x \cos(xy)$

**Voorbeeld 6.5.3:** Als  $f(x, y) = \ln(xy)$  dan is  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{x}$  en  $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{y}$ .

De eerste partiële afgeleiden van een functie van twee variabelen,  $z = f(x, y)$ , hebben ook een handige geometrische interpretatie. Als  $y = y_0$ , dan stelt  $z = f(x, y_0)$  de snijkromme voor van het oppervlak  $z = f(x, y)$  met het vlak  $y = y_0$  (zie figuur 6.6. Voor deze



**FIGUUR 6.6:** Meetkundige interpretatie van de partiële afgeleide naar  $x$

snijkromme stelt

$$f_x(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

de helling voor van de raaklijn aan deze kromme in het punt  $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ . Zo ook stelt

$$f_y(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

de helling voor van de raaklijn aan de snijkromme van het vlak  $x = x_0$  met het oppervlak  $z = f(x, y)$  in het punt  $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ . Van de genoemde raaklijnen kunnen we parametervoorstellingen geven. Hiervoor hebben we een *steunvector* en een *richtingsvector* nodig (zie VWO). Als we de eerste raaklijn beschouwen kiezen we als steunvector

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ f(x_0, y_0) \end{bmatrix}$$

en als richtingsvector

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \end{bmatrix}.$$

De parametervoorstelling van de raaklijn  $l$  wordt dan gegeven door

$$l : \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ f(x_0, y_0) \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \end{bmatrix}.$$

De parametervoorstelling van de andere raaklijn is op analoge wijze te bepalen. Zie hiervoor de opgaven.

**Voorbeeld 6.5.4:** Gegeven is de functie  $f(x, y) = -\frac{1}{2}x^2 - y^2 + \frac{25}{8}$ . Van deze functie willen we de parametervoorstellingen van de raaklijnen in de  $x$ -richting en de  $y$ -richting bepalen in het punt  $(\frac{1}{2}, 1, 2)$  en daarmee de vergelijking van het raakvlak. De partiële afgeleiden van  $f$  worden gegeven door  $f_x(x, y) = -x$  en  $f_y(x, y) = -2y$ . Derhalve wordt de helling in de  $x$ -richting gegeven door  $f_x(\frac{1}{2}, 1) = -\frac{1}{2}$  en de helling in de  $y$ -richting door  $f_y(\frac{1}{2}, 1) = -2$ . De parametervoorstellingen van de raaklijnen in de  $x$ -richting en de  $y$ -richting, respectievelijk aangegeven door  $l$  en  $m$ , worden dus gegeven door

$$l : \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

en

$$m : \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Het raakvlak is nu het vlak dat bepaald wordt door de lijnen  $l$  en  $m$ . Een normaal van dit vlak is een vector die loodrecht staat op beide richtingsvectoren van  $l$  en  $m$ . Verder gaat het vlak natuurlijk door het punt  $(\frac{1}{2}, 1, 2)$ , zodat de vergelijking van het vlak gegeven wordt door  $2x + 8y + 4z = 17$ . —

In het voorgaande hebben we de eerste orde partiële afgeleiden besproken van een functie van twee variabelen. De formele definitie van eerste orde partiële afgeleiden voor functies van 2, 3, ..enz. variabelen is niet wezenlijk anders. Een meetkundige interpretatie echter kunnen we op grond van dimensionele gronden niet geven.

**Definitie:** Laat  $f$  een functie zijn van de  $n$  (onafhankelijke) variabelen  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Onder de *eerste orde partiële afgeleide* van  $f$  naar de variabele  $x_i$  verstaan we een functie  $f_{x_i}(x_1, x_2, \dots, x_n)$  die gedefinieerd wordt door

$$f_{x_i}(\dots) = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_i + \Delta x_i, \dots, x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n)}{\Delta x_i}$$

**Opmerking 2:** Net zoals bij functies van twee variabelen noteren we deze partiële afgeleide als  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Om de partiële afgeleide van een functie  $f$  naar variabele  $x_i$  te berekenen beschouwen we de andere variabelen als constant en differentiëren "gewoon" naar de gegeven variabele.

**Voorbeeld 6.5.5:** Zo is

$$\frac{\partial}{\partial z}(xy + yz^2 + xz) = 2yz + x$$

en

$$\frac{\partial}{\partial w} \left( \frac{x + y + z}{w} \right) = -\frac{x + y + z}{w^2}.$$

Ten slotte nog een laatste woordje over hogere orde partiële afgeleiden. Net zoals bij gewone afgeleiden kunnen we, indien mogelijk, tweede, derde, en hogere partiële afgeleiden nemen van een functie van meerdere variabelen. We volstaan met enkele voorbeelden waaruit ook de wijze van noteren blijkt.

**Voorbeeld 6.5.6:** Gegeven is de functie  $f$  gedefinieerd door  $f(x, y) = 3xy^2 - 2y + 5x^2y^2$ . Dan  $f_x = 3y^2 + 10xy^2$  en  $f_y = 6xy - 2 + 10x^2y$ . De *tweede orde partiële afgeleiden* worden nu gegeven door:

$$f_{xx}(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, y) = 10y^2$$

$$f_{yy}(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x, y) = 6x + 10x^2$$

$$f_{xy}(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(x, y) = 6y + 20xy$$

en als laatste

$$f_{yx}(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x, y) = 6y + 20xy$$

**Opmerking :** Wat ons misschien uit vorig voorbeeld opvalt is dat  $f_{xy} = f_{yx}$ . Dit is geen toeval. Voor de meeste functies van meerdere variabelen maakt de differentiatie- volgorde niet uit.

**OPGAVEN (bij §6.5)**

d 18. Bepaal van de functies  $f$  de partiële afgeleiden naar  $x$  en  $y$ .

(a)  $f(x, y) = 2x - 3y + 5$ .

(b)  $f(x, y) = x^2 - 3y^2 + 7$ .

(c)  $f(x, y) = x^2 e^{2y}$ .

(d)  $f(x, y) = \ln \sqrt{xy}$ .

(e)  $f(x, y) = \cos(x^2 + y^2)$ .

(f)  $f(x, y) = \int_x^y t^2 - 1 dt$ .

d 19. Bepaal van de functies  $f$  de partiële afgeleiden naar  $x$ ,  $y$  en  $z$ .

(a)  $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ .

(b)  $f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}}$ .

(c)  $f(x, y, z) = \sin(x + 2y + 3z)$ .

h 20. Gegeven de Laplace - vergelijking  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ . Ga na of de volgende functies voldoen aan deze vergelijking.

(a)  $f(x, y) = 5xy$ .

(b)  $f(x, y) = e^x \sin(y)$ .

(c)  $f(x, y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ .

h 21. Bepaal voor de volgende functies  $f$  de derde orde partiële afgeleiden  $f_{xyy}$ ,  $f_{yxy}$  en  $f_{yyx}$ :

(a)  $f(x, y, z) = xyz$ .

(b)  $f(x, y, z) = e^{-x} \sin(xyz)$ .

h 22. Bepaal de vergelijkingen van de raakvlakken aan de functieoppervlakken in de aangegeven punten.

(a)  $f(x, y) = \sqrt{49 - x^2 - y^2}$  in punt  $(2, 3, 6)$ .

(b)  $f(x, y) = 9x^2 - y^2$  in punt  $(1, 3, 0)$ .

(c)  $f(x, y) = \frac{4xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$  in punt  $(1, 0, 0)$ .

t 23. Beschouw de functie gedefinieerd door

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & , (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

(a) Bepaal  $f_x(x, y)$  en  $f_y(x, y)$  voor  $(x, y) \neq (0, 0)$ .

(b) Bepaal  $f_x(0, 0)$  en  $f_y(0, 0)$  door gebruikmaking van de definities van de partiële afgeleiden.

## Hoofdstuk 7

# Meervoudige integralen

In hoofdstuk 5 hebben we geleerd wat we bedoelen met de integraal van (reëelwaardige) functies van één variabele. In dit hoofdstuk zullen we meervoudige integralen behandelen. Dit zijn integralen van reëelwaardige functies van meerdere variabelen. Deze worden bijvoorbeeld gebruikt om oppervlakten en volumina te berekenen van een grote variëteit aan figuren. Verder vinden ze vele toepassingen in de mechanica (voor het berekenen van massa's, massamiddelpunten, traagheidsmomenten), statistiek, electrotechniek, enzovoorts.

Wij zullen ons met name richten op twee- en drievoudige integralen.

### 7.1 Tweevoudige integralen

#### 7.1.1 De definitie

We zullen beginnen met de definitie van de *tweevoudige integraal*. Dit is een integraalbegrip waarbij we een begrensde functie  $f$  van twee variabelen over een gebied  $G$  binnen het domein van  $f$  zullen integreren. Deze  $G$  moet gesloten en begrensd zijn. Een gebied is begrensd als het binnen een cirkel (met eindige straal) ligt en gesloten als de rand van het gebied ook werkelijk tot het gebied behoort.

**Voorbeeld 7.1.1:** De cirkelschijf  $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$  is gesloten. Daarentegen is  $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$  niet gesloten. Ook het gebied  $\{(x, y) \mid 0 < x^2 + y^2 \leq 1\}$  is niet gesloten. Het punt  $(0, 0)$  is namelijk randpunt van dit gebied, maar behoort er niet toe.

We willen dat de definitie van de tweevoudige integraal zo is, dat in het geval van een positieve continue functie de tweevoudige integraal het volume voorstelt van het gedeelte van de ruimte dat “tussen”  $G$  en de grafiek van  $f$  ligt. De manier waarop we de definitie zullen geven lijkt zeer sterk op de definitie van de enkelvoudige integraal. Dat deze twee typen integralen een zeer sterke overeenkomst vertonen, zal later ook blijken uit de manier waarop een tweevoudige integraal berekend moet worden (dit gaat namelijk via enkelvoudige integralen).

We zien een tweevoudige integraal weer als limiet van Riemannsommen behorende bij partities van  $G$ , waarbij de maaswijdte van die partities naar nul gaat. Wat we doen

is het gebied  $G$  ophakken in  $n$  kleine deelgebiedjes  $G_i$  (we verkrijgen zo een *partitie*  $P$  van  $G$ ), waarna we in elk deelgebiedje een (tussen)punt  $\mathbf{t}_i$  kiezen. Hiermee maken we de *Riemansom behorend bij de partitie*  $P$ , die luidt

$$\sum_{i=1}^n f(\mathbf{t}_i) \Delta G_i$$

waarbij  $\Delta G_i$  de oppervlakte van het deelgebiedje  $G_i$  voorstelt. Merk op dat (in het geval van een positieve functie) één term van deze som de inhoud van een staafje voorstelt met als bodem  $G_i$  en hoogte  $f(\mathbf{t}_i)$ . Bovenstaande som benadert dan de eerder genoemde inhoud. De nauwkeurigheid van deze benadering hangt af van de grootte van de deelgebiedjes waarin we  $G$  ophakken.

We spreken af dat de *maaswijdte*  $|P|$  van de partitie  $P$  de grootste oppervlakte is van de deelgebiedjes die in  $P$  voorkomen. We laten de partities nu zo variëren dat de maaswijdte steeds kleiner wordt en naar nul gaat. Als de Riemansommen

$$\sum_{i=1}^n f(\mathbf{t}_i) \Delta G_i$$

dan, onafhankelijk van de keuze van tussenpunten, een vaste waarde benaderen, zeggen we dat de functie  $f$  *integreerbaar* is over  $G$ . De waarde die door de Riemansommen benaderd wordt heet de (*tweevoudige*) *integraal van  $f$  over  $G$* . We noteren deze waarde als

$$\iint_G f \, dA.$$

(De  $A$  staat voor Area=oppervlakte.)

**Opmerking :** Als  $f$  een integreerbare functie is, stelt  $\iint_G f \, dA$  intuïtief het “netto” volume voor van het lichaam dat ingesloten wordt door  $G$ , het oppervlak dat gevormd wordt door de lijnen loodrecht op het  $xy$ -vlak die door de randpunten van  $G$  gaan, en de grafiek van functie  $f$ . We gebruiken het woord “netto” omdat we ook negatieve bijdragen toestaan (namelijk bij negatieve functiewaarden).

Er rijzen natuurlijk meteen een aantal vragen, bijvoorbeeld:

- Welke functies van twee variabelen zijn integreerbaar?
- Hoe kunnen we tweevoudige integralen uitrekenen?

Bij enkelvoudige integralen integreerden we alleen over intervallen zodat we bij bovenstaande vragen eigenlijk alleen naar de functie hoefden te kijken. Bij tweevoudige integralen kunnen de gebieden waarover we integreren echter de wildste vormen aannemen. Als we al die vormen willen toelaten komen we op het lastige terrein van de maat- en integratietheorie (zie bijvoorbeeld **INSERT**). Vandaar dat wij slechts naar zogenaamde normaalgebieden kijken. Dit zijn gebieden die in zekere zin netjes zijn. In §7.1.3 laten we zien wat we met normaalgebieden bedoelen.

Als (deel)antwoord op de eerste vraag hebben we de volgende stelling.

**STELLING 7.1.1** *Elke continue reëelwaardige functie (van twee variabelen) is integreerbaar over een normaalgebied. Preciezer: als  $f$  continu is op een normaalgebied  $G$ , dan bestaat  $\iint_G f dA$ .*

We hebben nog niet gedefinieerd wat een continue functie van twee variabelen is. We zullen dit ook niet doen. We vertellen alleen dat functies die in één formule geschreven kunnen worden, continu zijn op hun domein (en dus ook op deelverzamelingen van hun domein).

Het bewijs van de stelling is zeer lastig en geven we derhalve niet. In het vervolg zullen we steeds over continue en dus integreerbare functies praten.

Voor de berekening van een tweevoudige integraal maken we gebruik van de berekening van twee enkelvoudige integralen. In hoofdstuk 5 hebben we gezien dat we enkelvoudige integralen niet altijd kunnen berekenen, omdat we niet van elke functie een primitieve kunnen uitdrukken in de ons bekende standaardfuncties. Deze beperking geldt dus ook voor tweevoudige integralen. De tweede beperking, het gebied  $G$ , speelt hierbij ook een rol. In de volgende paragraaf laten we zien hoe een integraal over een rechthoek (met zijden evenwijdig aan de assen) berekend kan worden. Naar aanleiding daarvan zullen we vervolgens laten zien wat we bedoelen met normaalgebieden, waarna we integralen over dit soort gebieden leren berekenen.

### 7.1.2 Integralen over rechthoeken

Om de integraal van een (continue) functie  $f$  over een rechthoek  $G$  te berekenen gaan we de definitie toepassen. Hiertoe veronderstellen we eerst dat de rechthoek de hoekpunten  $(a_1, a_2)$  (linksonder) en  $(b_1, b_2)$  (rechtsboven) heeft. Zo'n rechthoek noteren we met  $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ . We kiezen nu handige partities: De deelgebiedjes zijn zelf ook weer rechthoekjes, met zijden evenwijdig aan de oorspronkelijke, en zo dat elke zijde van een deelrechthoekje aan hooguit één ander deelrechthoekje grenst (zie figuur 7.1). Het komt er dan op neer dat we voor het interval  $[a_1, b_1]$  een partitie  $P_1 = \{x_0, x_1, \dots, x_m\}$  kiezen, en voor het interval  $[a_2, b_2]$  een partitie  $P_2 = \{y_0, y_1, \dots, y_n\}$ . Het deelrechthoekje in de  $i$ -de horizontale en  $j$ -de verticale strook noemen we  $G_{ij}$ .

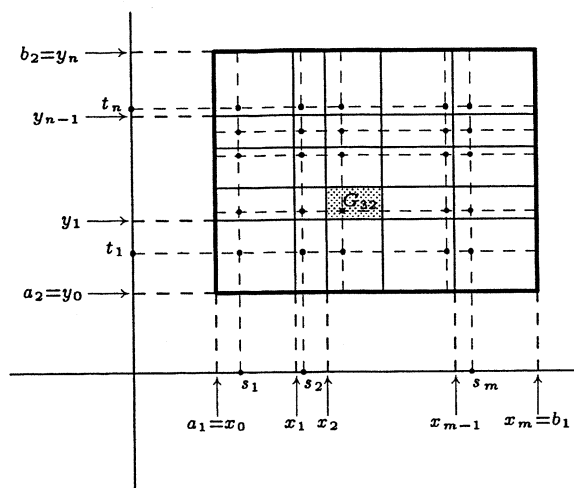
Ook de tussenpunten kiezen we netjes. De tussenpunten die bij rechthoekjes horen die in dezelfde verticale strook liggen hebben gelijke  $x$ -coördinaten, terwijl de tussenpunten die in dezelfde horizontale strook liggen gelijke  $y$ -coördinaten hebben (zie figuur 7.1). Merk op dat deze keuze overeenkomt met het kiezen van een strooiing  $S_1 = \{s_1, s_2, \dots, s_m\}$  in het interval  $[a_1, b_1]$  en een strooiing  $S_2 = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$  in het interval  $[a_2, b_2]$ . De bij deze partitie en keuze van tussenpunten behorende Riemansom luidt

$$\sum_{i,j} f(t_{ij}) \Delta G_{ij} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(s_i, t_j) (x_i - x_{i-1}) (y_j - y_{j-1}). \quad (7.1)$$

Aan deze Riemansom zien we nog niet zo veel. We kunnen deze som als volgt krijgen: Bepaal eerst de sommen per verticale strook en tel vervolgens al de resultaten op.

De som van de  $i$ -de verticale strook is gelijk aan

$$\sum_{j=1}^n f(s_i, t_j) (x_i - x_{i-1}) (y_j - y_{j-1}) = (x_i - x_{i-1}) \sum_{j=1}^n f(s_i, t_j) (y_j - y_{j-1}). \quad (7.2)$$



FIGUUR 7.1: Een handige partitie voor een rechthoek

Omdat  $s_i$  en  $(x_i - x_{i-1})$  in deze som constant zijn, kunnen we

$$\sum_{j=1}^n f(s_i, t_j)(y_j - y_{j-1})$$

zien als een Riemannsom van een functie van één variabele (namelijk de functie  $g(y) = f(s_i, y)$ ) en wel bij de partitie  $P_2$  (van het interval  $[a_2, b_2]$ ) met strooiing  $S_2$ . Voor kleine maaswijdte geldt dus dat deze Riemannsom bij benadering gelijk is aan

$$\int_{a_2}^{b_2} g(y) dy = \int_{a_2}^{b_2} f(s_i, y) dy.$$

Merk op dat deze integraal alleen van  $s_i$  afhangt. We noemen het resultaat derhalve  $F(s_i)$ . Uit formule 7.2 volgt nu dat de som van de  $i$ -de verticale strook bij benadering gelijk is aan

$$(x_i - x_{i-1}) \int_{a_2}^{b_2} f(s_i, y) dy = (x_i - x_{i-1}) F(s_i).$$

Riemannsom 7.1 is bij benadering gelijk aan de som van deze resultaten, dus aan

$$\sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) F(s_i)$$

Dit is op zijn beurt een Riemannsom van de functie  $F(x) = \int_{a_2}^{b_2} f(x, y) dy$  bij de partitie  $P_1$  (van het interval  $[a_1, b_1]$ ) en strooiing  $S_1$ . Hieruit volgt

$$\sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) F(s_i) \approx \int_{a_1}^{b_1} F(x) dx = \int_{a_1}^{b_1} \left( \int_{a_2}^{b_2} f(x, y) dy \right) dx.$$

Er is nu aannemelijk gemaakt dat de integraal van de functie  $f$  over de rechthoek gelijk is aan de laatste integraal. Deze is een zogenaamde *herhaalde integraal* en kan berekend



worden door twee enkelvoudige integralen na elkaar toe te passen: Eerst de integraal tussen de haakjes.

**Voorbeeld 7.1.2:** Bereken  $\int_1^3 \left( \int_{-1}^1 xy^2 dy \right) dx$ .

**Aldus:** We berekenen eerst de binnenste integraal (die tussen de haakjes):

$$\int_{-1}^1 xy^2 dy.$$

Hier staat dat we de functie  $xy^2$  naar  $y$  moeten primitiveren. Blijkbaar wordt  $x$  als een constante beschouwd! Een primitieve is dus  $\frac{1}{3}xy^3$  en dus

$$\int_{-1}^1 xy^2 dy = \frac{1}{3}xy^3 \Big|_{y=-1}^{y=1} = \frac{2}{3}x.$$

Er volgt dat

$$\int_1^3 \left( \int_{-1}^1 xy^2 dy \right) dx = \int_1^3 \frac{2}{3}x dx = \frac{8}{3}.$$

Wij hebben hier met benaderingen gewerkt. Het gevondene is echter ook precies te bewijzen. Dit is gedaan door Fubini (1879-1943). We formuleren het resultaat in de eerste voorlopige versie van de stelling van Fubini.

**STELLING 7.1.2 (Fubini, eenvoudige versie)** *Laat  $f$  een continue functie zijn op een rechthoek  $G = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ . Dan geldt*

$$\iint_G f dA = \int_{a_1}^{b_1} \left( \int_{a_2}^{b_2} f(x, y) dy \right) dx \quad (7.3)$$

$$= \int_{a_2}^{b_2} \left( \int_{a_1}^{b_1} f(x, y) dx \right) dy \quad (7.4)$$

De tweede variant (formule 7.4) is op dezelfde manier aannemelijk te maken als de eerste (formule 7.3). Hoe zullen we dan te werk moeten gaan? Probeer het zelf<sup>1</sup>.

**Voorbeeld 7.1.3:** Bereken  $\iint_G f dA$  als  $G = [0, 1] \times [0, 1]$  en  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  gedefinieerd is door  $f(x, y) = xe^{xy}$ .

**Aldus:** We hebben volgens de stelling van Fubini de keuze uit twee integratievolgorden. De ene keuze blijkt handiger te zijn dan de andere. Wij kiezen hier voor de handigste. Probeer zelf de andere volgorde.

$$\begin{aligned} \iint_G f dA &= \int_0^1 \left( \int_0^1 xe^{xy} dy \right) dx = \int_0^1 \left( e^{xy} \Big|_{y=0}^{y=1} \right) dx \\ &= \int_0^1 (e^x - 1) dx = e^x - x \Big|_0^1 = e - 2 \end{aligned}$$

<sup>1</sup>Sommeer eerst per horizontale strook

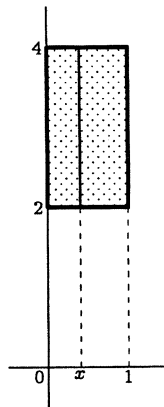
### 7.1.3 Normaalgebieden

Merk op dat we een rechthoek kunnen “opdelen” in horizontale of verticale lijntjes: Een rechthoek is de vereniging van oneindig veel intervallen. Bij de berekening van een tweevoudige integraal over een rechthoek maken we in feite gebruik van dit soort opdelingen. In het volgende voorbeeld beschrijven we wat we bedoelen.

**Voorbeeld 7.1.4:** In de stelling van Fubini hebben we gezien dat voor een continue functie  $f$  op de rechthoek  $G = [0, 1] \times [2, 4]$  geldt:

$$\iint_G f \, dA = \int_0^1 \left( \int_2^4 f(x, y) \, dy \right) dx$$

Merk op dat we bij de berekening eerst bij een willekeurige  $x$  integreren over het interval van  $y = 2$  tot  $y = 4$ . Daarna integreren we naar  $x$  over het interval  $[0, 1]$ . In feite kiezen we dus bij elke  $x \in [0, 1]$  een interval van  $y$ -waarden, in dit geval  $[2, 4]$ . We hebben de rechthoek dus min of meer opgedeeld in verticale lijnstukjes (zie figuur 7.2). We kunnen



**FIGUUR 7.2:** De opdeling van een rechthoek in verticale lijnstukjes

de rechthoek dan ook als volgt beschrijven

$$G = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1; 2 \leq y \leq 4\}$$

Hierme suggereren we dat we eerst een  $x$  kiezen tussen 0 en 1 en vervolgens bij elke gekozen  $x$  een  $y$  tussen 2 en 4. —■

De definitie van een normaalgebied is gebaseerd op het idee van het voorgaande voorbeeld:

**Definitie:** Een *basisnormaalgebied* in het vlak is een gesloten begrensd gebied dat op (minstens) één van de volgende twee manieren te beschrijven is:

$$G = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b; g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\} \quad (7.5)$$

waarbij  $g_1$  en  $g_2$  continue functies van  $x$  zijn, óf

$$G = \{(x, y) \mid c \leq y \leq d; h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}. \quad (7.6)$$

waarbij  $h_1$  en  $h_2$  continue functies van  $y$  zijn.

Een *normaalgebied* in het vlak is een gebied dat te knippen is in eindig veel basisnormaalgebieden.

Intuïtief geldt dat een gebied een basisnormaalgebied is, als het is op te delen in (oneindig veel) ononderbroken verticale lijnstukken (bij elke keuze van de  $x$ -coördinaat vormen de  $y$ -coördinaten van de punten in  $G$  met die  $x$ -coördinaat een interval, namelijk van  $g_1(x)$  tot  $g_2(x)$ ) of ononderbroken horizontale lijnstukken (bij elke keuze van de  $y$ -coördinaat vormen de  $x$ -coördinaten van de punten in  $G$  met die  $y$ -coördinaat een interval, namelijk van  $h_1(y)$  tot  $h_2(y)$ ), waarbij de randen de grafieken vormen van continue functies.

In de volgende twee voorbeelden illustreren we bovenstaande definitie en opmerking.

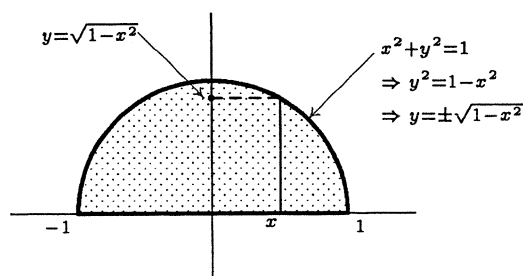
**Voorbeeld 7.1.5:** De halve cirkelschijf  $G = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1; y \geq 0\}$  is een normaalgebied (zelfs een basisnormaalgebied). Immers, bij een vaste keuze van een  $x$  tussen  $-1$  en  $1$  geldt voor de bijbehorende  $y$ -coördinaten dat

$$0 \leq y \leq \sqrt{1 - x^2}.$$

We vinden dus de continue functies  $g_1$  met  $g_1(x) = 0$  en  $g_2$  met  $g_2(x) = \sqrt{1 - x^2}$ . Er geldt

$$G = \{(x, y) \mid -1 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq \sqrt{1 - x^2}\}.$$

We hebben  $G$  nu opgedeeld in verticale lijnstukken, zie figuur 7.3. Ga na dat we  $G$  ook



**FIGUUR 7.3:** Het verticale lijnstukje behorend bij een  $x \in [-1, 1]$

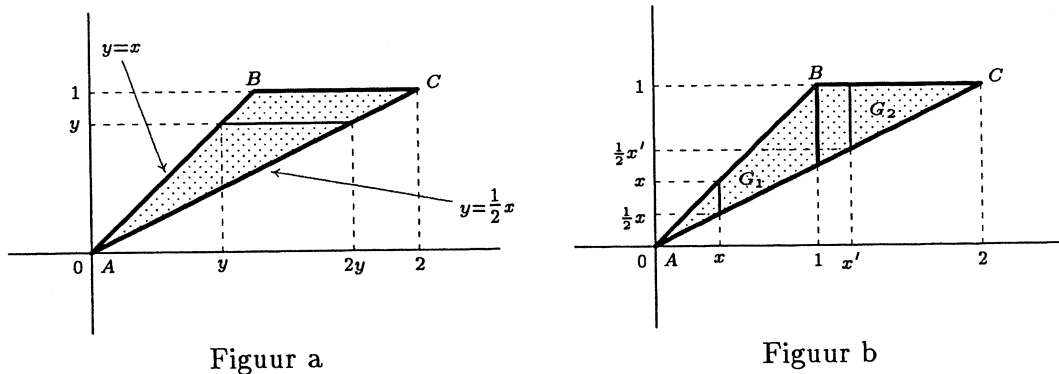
kunnen opdelen in horizontale lijnstukken. Geef zelf de bijbehorende beschrijving<sup>2</sup>. —■

**Voorbeeld 7.1.6:**  $G$  is het binnengebied met rand van de driehoek met hoekpunten  $A(0, 0)$ ,  $B(1, 1)$  en  $C(2, 1)$ . We beschrijven  $G$  op twee manieren als normaalgebied, eerst door  $G$  op te delen in horizontale lijnstukken. We kiezen daartoe een willekeurige  $y \in [0, 1]$ . Merk op dat de zijde  $AB$  op de lijn  $y = x$  en de zijde  $AC$  op de lijn  $y = \frac{1}{2}x$  ligt. Voor het horizontale lijnstuk in  $G$ , behorend bij  $y$ , geldt dus:  $y \leq x \leq 2y$  (zie figuur 7.4a). We concluderen dat

$$G = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq 1; y \leq x \leq 2y\}.$$

Nu de andere beschrijving. Het is verstandig om  $G$  in dit geval in twee (basis)normaalge-

<sup>2</sup> $G = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq 1; -\sqrt{1 - y^2} \leq x \leq \sqrt{1 - y^2}\}.$



**FIGUUR 7.4:** Twee manieren om een driehoek te beschrijven

bieden  $G_1$  en  $G_2$  te knippen (zie figuur 7.4b). We beschrijven eerst  $G_1$ . Kies daartoe een willekeurige  $x \in [0, 1]$ . Voor de bijbehorende  $y$ -coördinaten geldt dan dat deze tussen  $\frac{1}{2}x$  en  $x$  liggen, zodat

$$G_1 = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1; \frac{1}{2}x \leq y \leq x\}.$$

Voor de beschrijving van  $G_2$  nemen we  $x$  tussen 1 en 2. Voor de bijbehorende  $y$  coördinaten geldt nu  $\frac{1}{2}x \leq y \leq 1$ . Dus

$$G_2 = \{(x, y) \mid 1 \leq x \leq 2; \frac{1}{2}x \leq y \leq 1\}.$$

We concluderen dat

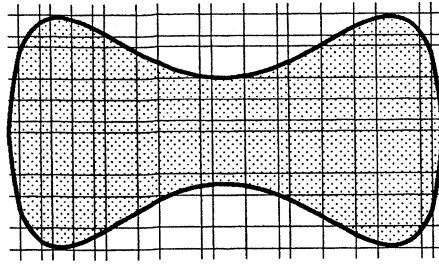
$$G = G_1 \cup G_2 = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1; \frac{1}{2}x \leq y \leq x\} \cup \{(x, y) \mid 1 \leq x \leq 2; \frac{1}{2}x \leq y \leq 1\}.$$

#### 7.1.4 Integralen over normaalgebieden

In §7.1.1 hebben we al opgemerkt dat een continue functie integreerbaar is over een normaalgebied. Dit betekent dat Riemansommen bij partities van  $G$  waarvan de maaswijdte naar nul gaat, convergeren naar een vaste waarde, namelijk de waarde van de integraal.

De vraag is hoe we een integraal kunnen berekenen. Om tot een in veel gevallen bruikbare methode te komen gaan we op dezelfde manier te werk als bij integralen over rechthoeken. We maken een partitie van het gebied door het gebied volgens horizontale en verticale lijnen “in stukken te knippen”. Op de deelgebieden aan de rand na, wordt het gebied daardoor in rechthoekjes verdeelt, met zijden evenwijdig aan de  $x$ - en  $y$ -as, en zo dat elke zijde aan hooguit één ander deelgebiedje grenst (zie figuur 7.5). Door in de Riemansommen alleen de deelgebieden te betrekken die een rechthoek vormen, kunnen we aantonen dat deze bij naar nul naderende maaswijdte convergeren naar

$$\int_a^b \left( \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy \right) dx$$



**FIGUUR 7.5:** Een handige partitie voor een normaalgebied

als we sommeren over verticale stroken en  $G$  beschrijven zoals in (7.5) Als we sommeren over horizontale stroken convergeren de genoemde Riemansommen naar

$$\int_c^d \left( \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} f(x, y) dx \right) dy.$$

Hierbij wordt  $G$  beschreven zoals in (7.6). Verder kunnen we aantonen dat de Riemansommen ook convergeren naar

$$\iint_G f dA.$$

Dit is aan te voelen, doordat bij kleinere maaswijdte het verwaarloosde gedeelte bij de rand steeds kleiner zal worden.

Met dit alles hebben we de tweede versie van de stelling van Fubini aannemelijk gemaakt:

**STELLING 7.1.3 (Fubini)** *Laat  $f$  een continue functie zijn op een basisnormaalgebied  $G$ . Veronderstel dat  $G$  gegeven wordt door*

$$G = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b; g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$$

waarbij  $g_1$  en  $g_2$  continue functies van  $x$  zijn, óf

$$G = \{(x, y) \mid c \leq y \leq d; h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}.$$

waarbij  $h_1$  en  $h_2$  continue functies van  $x$  zijn. Dan geldt:

$$\iint_G f dA = \int_a^b \left( \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy \right) dx$$

of

$$\iint_G f dA = \int_c^d \left( \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx \right) dy.$$

**Opmerking :** Vanwege bovenstaande stelling noteren we ook vaak

$$\iint_G f dA = \iint_G f(x, y) d(x, y).$$

**Voorbeeld 7.1.7:** We berekenen  $\iint_G f dA$  als  $f$  gegeven wordt door  $f(x, y) = x + y$  en  $G = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1; y \geq 0\}$ . In voorbeeld 7.1.5 hebben we gezien dat we  $G$  kunnen schrijven in de vorm

$$G = \{(x, y) \mid -1 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\}.$$

Met Fubini volgt dan

$$\begin{aligned} \iint_G f dA &= \int_{-1}^1 \left( \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (x+y) dy \right) dx \\ &= \int_{-1}^1 \left. \left( xy + \frac{1}{2}y^2 \right) \right|_{y=0}^{y=\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= \int_{-1}^1 \left( x\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}(1-x^2) \right) dx \\ &= \left. \left( -\frac{1}{3}(1-x^2)^{3/2} + \frac{1}{2}x - \frac{1}{6}x^3 \right) \right|_{-1}^1 = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

We kunnen  $G$  ook beschrijven door

$$G = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq 1; -\sqrt{1-y^2} \leq x \leq \sqrt{1-y^2}\}.$$

Dit levert een tweede manier om de gevraagde integraal te berekenen:

$$\begin{aligned} \iint_G f dA &= \int_0^1 \left( \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} (x+y) dx \right) dy \\ &= \int_0^1 \left. \left( \frac{1}{2}x^2 + xy \right) \right|_{x=-\sqrt{1-y^2}}^{x=\sqrt{1-y^2}} dy \\ &= \int_0^1 2y\sqrt{1-y^2} dy \\ &= \left. -\frac{2}{3}(1-y^2)^{3/2} \right|_0^1 = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Als we een gebied op twee manieren kunnen beschrijven, zegt de stelling van Fubini dat we  $\iint_G f dA$  in principe op twee manieren kunnen berekenen. Soms is de ene manier handiger dan de andere. Zo bestaat in het bovenstaande voorbeeld een lichte voorkeur voor de tweede daar behandelde manier. Evenals bij enkelvoudige integralen kan het lastig zijn een primitieve uit te drukken in de ons bekende standaardfuncties of is het zelfs onmogelijk. In dat geval kan het zinvol zijn de integratievolgorde om te wisselen. Het volgende voorbeeld illustreert dit.

**Voorbeeld 7.1.8:**  $G$  is het binnengebied met rand van de driehoek met hoekpunten  $A(0, 0)$ ,  $B(1, 1)$  en  $C(2, 1)$ . We berekenen  $\iint_G y^2 e^{y^2} d(x, y)$ .

In voorbeeld 7.1.6 hebben we gezien dat

$$G = G_1 \cup G_2 = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1; \frac{1}{2}x \leq y \leq x\} \cup \{(x, y) \mid 1 \leq x \leq 2; \frac{1}{2}x \leq y \leq 1\}.$$

Dus

$$\begin{aligned} \iint_G y^2 e^{y^2} d(x, y) &= \iint_{G_1} y^2 e^{y^2} d(x, y) + \iint_{G_2} y^2 e^{y^2} d(x, y) \\ &= \int_0^1 \left( \int_{\frac{1}{2}x}^x y^2 e^{y^2} dy \right) dx + \int_1^2 \left( \int_{\frac{1}{2}x}^1 y^2 e^{y^2} dy \right) dx. \end{aligned}$$

Echter, we kunnen een primitieve van  $y^2 e^{y^2}$  niet uitdrukken in de ons bekende standaardfuncties, zodat bovenstaande poging vruchteloos is. Omwisselen van de integratievolgorde biedt echter uitzicht: In voorbeeld 7.1.6 hebben we gezien dat we  $G$  ook als volgt kunnen beschrijven

$$G = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq 1; y \leq x \leq 2y\}$$

Dus

$$\begin{aligned} \iint_G y^2 e^{y^2} d(x, y) &= \int_0^1 \left( \int_y^{2y} y^2 e^{y^2} dx \right) dy \\ &= \int_0^1 xy^2 e^{y^2} \Big|_{x=y}^{x=2y} dy \\ &= \int_0^1 y^3 e^{y^2} dy = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

We eindigen deze paragraaf met een beschouwing over het begrip oppervlakte. Iedereen heeft hierbij een idee: De oppervlakte van een rechthoek, driehoek, parallellogram en cirkel kunnen we bepalen, en met behulp van enkelvoudige integralen ook oppervlakten van figuren ingesloten door de  $x$ -as, de lijnen  $x = a$  en  $x = b$  en de grafiek van een (positieve) functie  $f$ . Echter, wat is de oppervlakte van een willekeurige gebied  $G$  in het vlak? Om deze te bepalen, ligt het voor de hand om het gebied op te delen in  $n$  kleine deelgebiedjes  $G_i$  (we nemen dus een partitie van  $G$ ) waarvan we de oppervlakte  $\Delta G_i$  kunnen bepalen, en te zeggen dat

$$\text{Opp}(G) \approx \sum_{i=1}^n \Delta G_i.$$

Deze benadering zal beter worden als we een partitie nemen met een kleinere maaswijdte. Merk op dat het hier om Riemanssommen gaat bij de genomen partitie, het gebied  $G$  en de functie  $f$  die constant gelijk is aan 1. We concluderen

$$\text{Opp}(G) = \iint_G dA.$$

Omdat oppervlakte slechts een intuïtief begrip is, wordt bovenstaande uitdrukking als *definitie van oppervlakte* (van een gebied  $G$  in het vlak) gegeven.

**Voorbeeld 7.1.9:** We berekenen de oppervlakte van de ellips

$$G = \{(x, y) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}$$

met  $a > 0$  en  $b > 0$ . Met het bovenstaande volgt dat deze oppervlakte gelijk is aan

$$\iint_G dA.$$

Om deze integraal te berekenen, geven we eerst een beschrijving van  $G$  volgens verticale intervallen

$$E = \{(x, y) \mid -a \leq x \leq a; -b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \leq y \leq b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\}.$$

Hieruit volgt

$$\iint_E dA = \int_{-a}^a \left( \int_{-b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}}^{b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}} dy \right) dx = \int_{-a}^a 2b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} dx.$$

Via de substitutie  $t = \frac{x}{a}$  zien we dat dit laatste gelijk is aan

$$2ab \int_{-1}^1 \sqrt{1 - t^2} dt = 2ab \left( \frac{t}{2} \sqrt{1 - t^2} + \frac{1}{2} \arcsin t \right) \Big|_{-1}^1 = \pi ab$$

(zie de tabel met integralen). —

### 7.1.5 Transformatie naar poolcoördinaten

In de voorgaande paragraaf hebben we gezien hoe we met behulp van de stelling van Fubini een tweevoudige integraal over een gebied  $G$  kunnen berekenen. De hoofdgedachte bij het bewijs van deze stelling is, dat we het gebied  $G$  opdelen in rechthoekjes met zijden evenwijdig aan de  $x$ -as en de  $y$ -as. Soms echter, is deze opdeling helemaal niet voor de hand liggend: De functie en/of het gebied “vragen” dan om een andere opdeling. In deze paragraaf zullen we de situatie bekijken waarin het gebied cirkelvormig is en/of de functie een functie van  $x^2 + y^2$  is. In de volgende paragraaf doen we het algemeen.

Het volgende voorbeeld laat zien dat de gegeven integraal zelfs niet is te berekenen met de methode van de vorige paragraaf. Verderop zullen we zien dat de integraal met de methode van deze paragraaf wel is te berekenen.

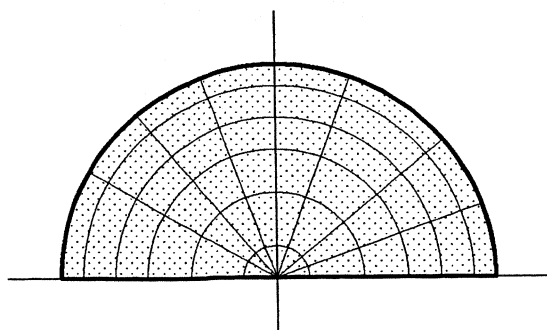
**Voorbeeld 7.1.10:** Laat  $f(x, y) = e^{x^2+y^2}$  en  $G = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1; y \geq 0\}$ . Ga na dat volgens Fubini geldt

$$\iint_G f dA = \int_{-1}^1 \left( \int_0^{\sqrt{1-x^2}} e^{x^2+y^2} dy \right) dx.$$

Nu kennen we voor  $e^{x^2+y^2}$  geen primitieve naar  $x$ , uitgedrukt in de ons bekende standaardfuncties en dus biedt bovenstaande wijze van berekening geen perspectief. Ook verwisseling van de integratievolgorde levert niets op. —

Bij de tweede methode om tweevoudige integralen te berekenen kiezen we feitelijk een andere partitie van het gebied  $G$ : In de vorige paragraaf legden we over  $G$  een “netwerk”





FIGUUR 7.6: Een andere handige partitie voor een normaalgebied

van lijnen evenwijdig aan de  $x$ -as en de  $y$ -as. Nu leggen we over  $G$  een “netwerk” van lijnen door de oorsprong, en cirkels met de oorsprong als middelpunt (zie figuur 7.6). De tussenpunten kiezen we steeds precies in het midden van het deelgebiedje.

Voordat we de zaak gaan uitwerken, merken we op dat het bij deze keuze van netwerk niet handig is om met de gewone rechthoekskoördinaten  $(x, y)$  te werken. Het gaat beter met poolcoördinaten  $(r, \varphi)$ : Hierbij stelt  $r$  de afstand van het te beschrijven punt tot de oorsprong voor en  $\varphi$  de hoek van de positieve  $x$ -as met de verbindinglijn van het punt tot de oorsprong (zie §1.3.2). Het verband tussen rechthoekskoördinaten en poolcoördinaten wordt gegeven door

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases}$$

en andersom

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi \text{ zo dat } \cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \text{én } \sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{cases}$$

We zullen nu een formule afleiden, waarmee we tweevoudige integralen (eventueel) middels poolcoördinaten kunnen bepalen. In figuur 7.7 is deelgebiedje  $G_{ij}$  getekend. Dit gebiedje kan met poolcoördinaten beschreven worden door

$$G_{ij} = \{(r, \varphi) \mid r_{i-1} \leq r \leq r_i; \varphi_{j-1} \leq \varphi \leq \varphi_j\}.$$

Voor het tussenpunt  $\mathbf{t}_{ij} = (\bar{r}_i, \bar{\varphi}_j)$  geldt

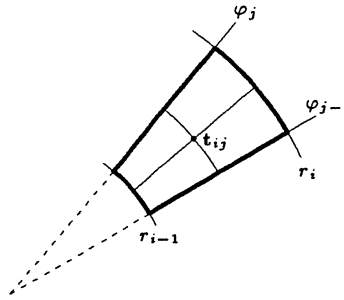
$$\bar{r}_i = \frac{r_i + r_{i-1}}{2} \quad \text{en} \quad \bar{\varphi}_j = \frac{\varphi_j + \varphi_{j-1}}{2}$$

Ga nu na dat de oppervlakte  $\Delta G_{ij}$  van het deelgebiedje  $G_{ij}$  gelijk is aan

$$\Delta G_{ij} = \frac{1}{2}(r_i^2 - r_{i-1}^2)\Delta\varphi = \frac{1}{2}(r_i + r_{i-1})\Delta r \Delta\varphi = \bar{r}_i \Delta r \Delta\varphi$$

waarbij  $\Delta r = r_i - r_{i-1}$  en  $\Delta\varphi = \varphi_j - \varphi_{j-1}$  (zie opgave 15).

Laat nu  $f$  een functie zijn van de twee variabelen  $x$  en  $y$ . Omdat we met poolcoördinaten werken, vervangen we  $x$  door  $r \cos \varphi$  en  $y$  door  $r \sin \varphi$ . Voor het tussenpunt  $\mathbf{t}_{ij}$  geldt



FIGUUR 7.7: Een deelgebiedje met tussenpunt

dus dat  $x = \bar{r}_i \cos \bar{\varphi}_j$  en  $y = \bar{r}_i \sin \bar{\varphi}_j$ . We gaan nu  $\iint_G f dA$  bepalen via Riemannsommen. Er geldt, voor een partitie met kleine maaswijdte:

$$\iint_G f dA \approx \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f(\mathbf{t}_{ij}) \Delta G_{ij} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f(\bar{r}_i \cos \bar{\varphi}_j, \bar{r}_i \sin \bar{\varphi}_j) \bar{r}_i \Delta r \Delta \varphi$$

Nu is de laatste som een Riemannsom bij de functie  $rf(r \cos \varphi, r \sin \varphi)$ , welke geschreven is op de manier van formule 7.1 op bladzijde 264. We hebben in §7.1.2 gezien dat deze som op zijn beurt ongeveer gelijk is aan

$$\iint_G f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r d(r, \varphi),$$

waarbij we  $G$  moeten beschrijven in poolcoördinaten.

We hebben de volgende stelling aannemelijk gemaakt:

**STELLING 7.1.4** *Laat  $G$  een normaalgebied zijn en  $f$  een continue functie op  $G$ . Dan geldt*

$$\iint_G f dA = \iint_G f(x, y) d(x, y) = \iint_G f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r d(r, \varphi).$$

*In het eerste geval wordt  $G$  beschreven in rechthoekscoördinaten en in het tweede geval in poolcoördinaten.*

Het volgende voorbeeld laat zien hoe deze stelling toegepast kan worden.

**Voorbeeld 7.1.11:** In voorbeeld 7.1.10 hebben we gezien dat we

$$\iint_G e^{x^2+y^2} d(x, y)$$

met  $G = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1; y \geq 0\}$  niet kunnen berekenen met de methode van de vorige paragraaf. We gaan daarom over op poolcoördinaten. Ga na dat  $G$  in dat geval beschreven wordt door  $G = \{(r, \varphi) \mid 0 \leq \varphi \leq \pi; 0 \leq r \leq 1\}$ . Volgens bovenstaande stelling geldt

$$\iint_G e^{x^2+y^2} d(x, y) = \iint_G e^{(r \cos \varphi)^2 + (r \sin \varphi)^2} r d(r, \varphi) = \iint_G r e^{r^2} d(r, \varphi).$$

Deze integraal is wél op te lossen met de methoden van de vorige paragraaf:

$$\iint_G r e^{r^2} d(r, \varphi) = \int_0^\pi \left( \int_0^1 r e^{r^2} dr \right) d\varphi = \int_0^\pi \frac{1}{2} e^{r^2} \Big|_0^1 d\varphi = \frac{1}{2} \pi (e - 1).$$

**Opmerking :** De methode van bepaling van bovenstaande integraal, kan gebruikt worden om te bewijzen dat  $\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\pi}$ . Deze integraal is in vele toepassingen van groot belang.

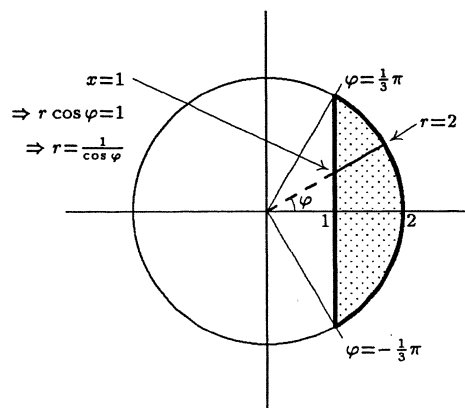
In het volgende voorbeeld is het wat lastiger om het gebied in poolcoördinaten te beschrijven.

**Voorbeeld 7.1.12:** Laat  $G = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4; x \geq 1\}$ . Bepaal

$$\iint_G \frac{1}{(x^2 + y^2)^{3/2}} d(x, y).$$

**Aldus:** Een rechtstreekse berekening van deze integraal is zeer lastig. Daarom gaan we over op poolcoördinaten. Een voor de hand liggende keuze, omdat het om een functie van  $x^2 + y^2$  gaat én omdat het gebied een gedeelte van een cirkel om de oorsprong is.

Allereerst schetsen we  $G$  (zie figuur 7.8). Ga met behulp van deze schets na dat het



**FIGUUR 7.8:** Het gebied  $G$  van voorbeeld 7.1.12

gebied in poolcoördinaten beschreven wordt door

$$G = \{(r, \varphi) \mid -\frac{1}{3}\pi \leq \varphi \leq \frac{1}{3}\pi; \frac{1}{\cos \varphi} \leq r \leq 2\}.$$

Dus

$$\begin{aligned} \iint_G \frac{1}{(x^2 + y^2)^{3/2}} d(x, y) &= \iint_G \frac{1}{r^3} \cdot r d(r, \varphi) \\ &= \int_{-\frac{1}{3}\pi}^{\frac{1}{3}\pi} \left( \int_{\frac{1}{\cos \varphi}}^2 \frac{1}{r^2} dr \right) d\varphi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{-\frac{1}{3}\pi}^{\frac{1}{3}\pi} (\cos \varphi - \frac{1}{2}) d\varphi \\
 &= \sqrt{3} - \frac{1}{3}\pi
 \end{aligned}$$

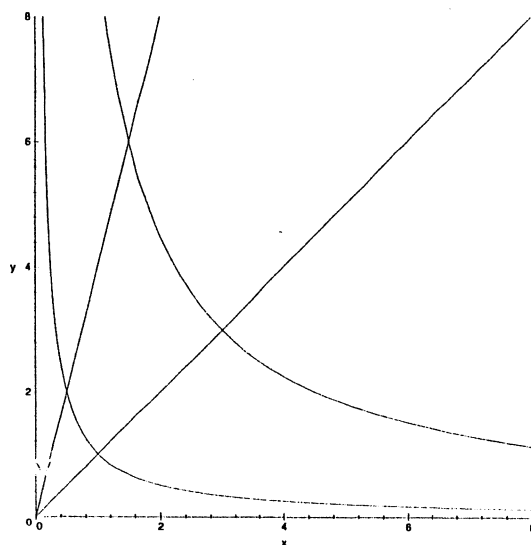
### 7.1.6 Transformaties in het algemeen

In de vorige paragraaf hebben we gezien dat het handig kan zijn om een integraal met behulp van poolcoördinaten te berekenen. Dit is afhankelijk van de vorm van het gebied en/of van de functie. Er zijn situaties waarbij het gebied en/of de functies om andere coördinatentransformaties vragen.

**Voorbeeld 7.1.13:** Het gebied  $G$  wordt beschreven door

$$G = \{(x, y) \mid x \geq 0; x \leq y \leq 4x; 1 \leq xy \leq 9\}.$$

In figuur 7.9 hebben we  $G$  geschetst. Het is niet echt makkelijk om dit gebied te beschrijven



**FIGUUR 7.9:** Het gebied behorend bij voorbeeld 7.1.13

als normaalgebied in  $x$ - en  $y$ -coördinaten, en integralen over dit gebied worden al gauw vervelend. Als we schrijven:

$$\begin{cases} u = xy \\ v = y/x \end{cases}$$

dan wordt de beschrijving van  $G$  een stuk eenvoudiger: We krijgen dan namelijk

$$G = \{(u, v) \mid 1 \leq u \leq 9; 1 \leq v \leq 4\}.$$

Het beschrevene in bovenstaand voorbeeld wordt een *coördinatentransformatie* genoemd: We gaan van  $(x, y)$ -coördinaten over op  $(u, v)$ -coördinaten via een transformatieformule, die een vectorfunctie van  $\mathbb{R}^2$  naar  $\mathbb{R}^2$  is:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{bmatrix} = \mathbf{t}(x, y).$$

Een voorwaarde voor een coördinatentransformatie is dat deze inverteerbaar moet zijn op  $G$ : Dit is een voor de hand liggende eis, omdat we na overgang op nieuwe coördinaten, ook weer “terug” moeten kunnen naar de oorspronkelijke coördinaten! Voor het vervolg moet bovendien geeist worden dat de partiële afgeleiden van de componentfuncties van de coördinatentransformaties bestaan.

**Voorbeeld 7.1.14:** De transformatie van voorbeeld 7.1.13 kan voor positieve  $x$  en  $y$ , en positieve  $u$  en  $v$ , beschreven worden met de volgende twee transformatieformules:

$$\mathbf{t}_1(x, y) = \begin{bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xy \\ y/x \end{bmatrix} \quad \text{of met} \quad \mathbf{t}_2(u, v) = \begin{bmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{u/v} \\ \sqrt{uv} \end{bmatrix}$$

waarbij  $\mathbf{t}_1$  en  $\mathbf{t}_2$  elkaars inverse zijn.

Ook bij de overgang op poolcoördinaten hoort een transformatieformule:

$$\mathbf{t}(r, \varphi) = \begin{bmatrix} x(r, \varphi) \\ y(r, \varphi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{bmatrix}.$$

De inverse van deze transformatie is vervelend (zie opgave 28). —■

Merk nu op dat een coördinatentransformatie een partitie van het gebied  $G$  induceert: We kunnen namelijk krommen van het type  $u = \text{constant}$  en  $v = \text{constant}$  in het gebied tekenen. In figuur 7.10 hebben we dit gedaan voor de coördinatentransformatie behorend bij voorbeeld 7.1.13, en in figuur 7.6 voor de overgang op poolcoördinaten (hier zijn de krommen  $r = \text{constant}$  (cirkels dus) en  $\varphi = \text{constant}$  (rechten door de oorsprong dus) getekend). Door een coördinatentransformatie wordt er als het ware een netwerk over het gebied gelegd.

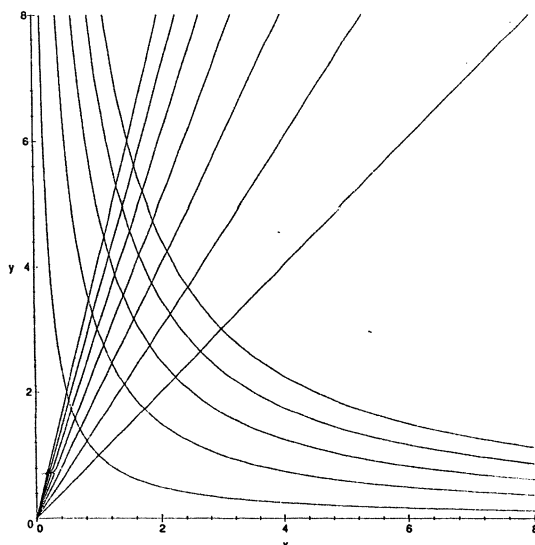
We gaan nu

$$\iint_G f \, dA.$$

bestuderen. Om deze integraal te berekenen gaan we uit van een algemene coördinatentransformatie

$$\mathbf{t}(u, v) = \begin{bmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \end{bmatrix}$$

Deze coördinatentransformatie induceert een partitie van het gebied  $G$ , die het gebied  $G$  in deelgebiedjes  $G_{ij}$  verdeelt. Het gebiedje  $G_{ij}$  wordt hierbij begrensd door krommen van het type  $u = \text{constant} = u_{i-1}$  en  $u = \text{constant} = u_i$  en door krommen van het type



**FIGUUR 7.10:** De door de coördinatentransformatie geïnduceerde partitie

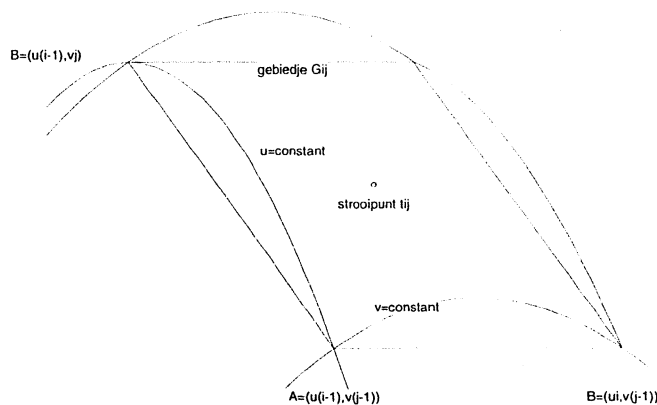
$v = \text{constant} = v_{j-1}$  en  $v = \text{constant} = v_j$  (zie figuur 7.11). Een bijbehorende Riemansom wordt nu

$$\iint_G f \, dA \approx \sum f(\mathbf{t}_{ij}) \Delta G_{ij} = \sum_{i,j} f(x(\bar{u}_i, \bar{v}_j), y(\bar{u}_i, \bar{v}_j)) \Delta G_{ij}. \quad (7.7)$$

Hierbij hebben we de  $x$ - en  $y$ -coördinaten van de tussenpunten  $\mathbf{t}_{ij}$  beschreven met behulp van  $u$  en  $v$ : De  $x$ -coördinaat als  $x(\bar{u}_i, \bar{v}_j)$  en de  $y$ -coördinaat als  $y(\bar{u}_i, \bar{v}_j)$

Onze taak is nu om de oppervlakte  $\Delta G_{ij}$  uit te drukken in  $u$  en  $v$ . Hierbij is enige kennis nodig uit de cursus lineaire algebra.

We schetsen eerst een gebiedje  $G_{ij}$ , zie figuur 7.11. De oppervlakte van het gebiedseg-



**FIGUUR 7.11:** Een deelgebiedje  $G_{ij}$

mentje  $G_{ij}$  wordt benaderd door de oppervlakte van het parallellogram opgespannen door

de vectoren  $\overrightarrow{AB}$  en  $\overrightarrow{AC}$  (zie figuur 7.11). Merk op dat geldt

$$A = (x(u_{i-1}, v_{j-1}), y(u_{i-1}, v_{j-1})),$$

$$B = (x(u_{i-1}, v_j), y(u_{i-1}, v_j))$$

en

$$C = (x(u_i, v_{j-1}), y(u_i, v_{j-1})).$$

Hierbij zijn  $u_{i-1}$ ,  $u_i$ ,  $v_{j-1}$  en  $v_j$  de constanten geïnduceerd door het netwerk. Er volgt

$$\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} x(u_{i-1}, v_j) - x(u_{i-1}, v_{j-1}) \\ y(u_{i-1}, v_j) - y(u_{i-1}, v_{j-1}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1(v_j) - g_1(v_{j-1}) \\ g_2(v_j) - g_2(v_{j-1}) \end{bmatrix}$$

waarbij  $g_1$  de functie met voorschrift  $g_1(t) = x(u_{i-1}, t)$  is en  $g_2$  die met voorschrift  $g_2(t) = y(u_{i-1}, t)$ .

Uit hoofdstuk 4 (deel 1 van het dictaat) weten we dat voor differentieerbare functies  $g$  geldt dat

$$g(x) \approx g(x_{i-1}) + g'(x_{i-1})(x - x_{i-1})$$

mits  $x - x_{i-1}$  klein is. De rechter uitdrukking is de linearisering van  $g$  om  $x_{i-1}$ . Uit bovenstaande volgt dat

$$g(x_i) - g(x_{i-1}) \approx g'(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}).$$

Als we dit toepassen op  $g_1$  en  $g_2$  volgt

$$\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} g_1(v_j) - g_1(v_{j-1}) \\ g_2(v_j) - g_2(v_{j-1}) \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} g'_1(v_{j-1})(v_j - v_{j-1}) \\ g'_2(v_{j-1})(v_j - v_{j-1}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g'_1(v_{j-1}) \\ g'_2(v_{j-1}) \end{bmatrix} (v_j - v_{j-1}).$$

Merk nu op dat

$$g'_1(v_{j-1}) = \frac{\partial x}{\partial v}(u_{i-1}, v_{j-1})$$

en dat

$$g'_2(v_{j-1}) = \frac{\partial y}{\partial v}(u_{i-1}, v_{j-1})$$

We zien

$$\overrightarrow{AB} \approx \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial v}(u_{i-1}, v_{j-1}) \\ \frac{\partial y}{\partial v}(u_{i-1}, v_{j-1}) \end{bmatrix} (v_j - v_{j-1}).$$

Op dezelfde manier leiden we af dat

$$\overrightarrow{AC} \approx \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u_{i-1}, v_{j-1}) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u_{i-1}, v_{j-1}) \end{bmatrix} (u_i - u_{i-1}).$$

Uit de lineaire algebra is bekend dat de oppervlakte van het parallellogram opgespannen door  $\vec{AB}$  en  $\vec{AC}$  gelijk is aan  $|\det[\vec{AB}, \vec{AC}]|$  en uit bovenstaande afleiding volgt dat dat op zijn beurt gelijk is aan

$$\left| \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u_{i-1}, v_{j-1}) & \frac{\partial x}{\partial v}(u_{i-1}, v_{j-1}) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u_{i-1}, v_{j-1}) & \frac{\partial y}{\partial v}(u_{i-1}, v_{j-1}) \end{bmatrix} \right| (u_i - u_{i-1})(v_j - v_{j-1}).$$

Met (7.7) volgt nu

$$\iint_G f(x, y) d(x, y) \approx \sum_{ij} f(x(\bar{u}_i, \bar{v}_j), y(\bar{u}_i, \bar{v}_j)) \left| \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u_{i-1}, v_{j-1}) & \frac{\partial x}{\partial v}(u_{i-1}, v_{j-1}) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u_{i-1}, v_{j-1}) & \frac{\partial y}{\partial v}(u_{i-1}, v_{j-1}) \end{bmatrix} \right| (u_i - u_{i-1})(v_j - v_{j-1}).$$

Deze uitdrukking correspondeert met een Riemansom van de integraal

$$\iint_G f(x(u, v), y(u, v)) \left| \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial x}{\partial v}(u, v) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial y}{\partial v}(u, v) \end{bmatrix} \right| d(u, v)$$

waarbij  $G$  beschreven wordt met  $(u, v)$ -coördinaten.

In het voorgaande hebben we de volgende stelling aannemelijk gemaakt:

**STELLING 7.1.5** *Laat  $G$  een normaal gebied in het vlak zijn en laat*

$$\mathbf{t}(u, v) = \begin{bmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \end{bmatrix}$$

*een coördinatentransformatie zijn, waarbij we van  $(x, y)$ -coördinaten overgaan op  $(u, v)$ -coördinaten. Dan geldt:*

$$\iint_G f(x, y) d(x, y) = \iint_H f(x(u, v), y(u, v)) \left| \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial x}{\partial v}(u, v) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial y}{\partial v}(u, v) \end{bmatrix} \right| d(u, v),$$

*waarbij  $H$  het met  $G$  corresponderende gebied is, beschreven in  $(u, v)$ -coördinaten.*

De determinant die in bovestaande stelling voorkomt wordt *de Jacobiaan van de transformatie* genoemd en vaak genoteerd als  $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$ , dus

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial x}{\partial v}(u, v) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial y}{\partial v}(u, v) \end{bmatrix}.$$

We zullen in het volgende voorbeeld laten zien hoe bovenstaande stelling toegepast kan worden.



**Voorbeeld 7.1.15:** Laat  $G$  het gebied zijn van voorbeeld 7.1.13, dus het gebied in het eerste kwadrant van het  $(x, y)$ -vlak dat begrensd wordt door de hyperbolen  $xy = 1$ ,  $xy = 9$  en de lijnen  $y = x$ ,  $y = 4x$  (zie figuur 7.9). We willen

$$\iint_G \left( \sqrt{\frac{y}{x}} + \sqrt{xy} \right) d(x, y)$$

bepalen. Gezien de vorm van het gebied en de gedaante van de integrand is het handig om over te gaan op een netwerk bestaande uit hyperbolen van de vorm  $xy = \text{constant}$  en lijnen van de vorm  $\frac{y}{x} = \text{constant}$ . Dus we passen (net als in voorbeeld 7.1.13) de transformatie  $u = xy$  en  $v = \frac{y}{x}$  toe.

Als we  $G$  beschrijven met  $(u, v)$ -coördinaten krijgen we

$$H = \{(u, v) \mid 1 \leq u \leq 9; 1 \leq v \leq 4\}$$

(dit is zeker een vereenvoudiging). De integrand  $\sqrt{\frac{y}{x}} + \sqrt{xy}$  gaat over in  $\sqrt{v} + \sqrt{u}$ .

In voorbeeld 7.1.14 hebben we gezien dat  $x(u, v) = \sqrt{\frac{u}{v}}$  en  $y(u, v) = \sqrt{uv}$  en dus

$$\frac{\partial x}{\partial u}(u, v) = \frac{1}{2\sqrt{uv}},$$

$$\frac{\partial x}{\partial v}(u, v) = \frac{-u}{2\sqrt{uv^3}},$$

$$\frac{\partial y}{\partial u}(u, v) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{u}{v}},$$

$$\frac{\partial y}{\partial v}(u, v) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{v}{u}},$$

zodat

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \det \begin{bmatrix} \frac{1}{2\sqrt{uv}} & \frac{-u}{2\sqrt{uv^3}} \\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{u}{v}} & \frac{1}{2}\sqrt{\frac{v}{u}} \end{bmatrix} = \frac{1}{2v}.$$

Dus

$$\begin{aligned} \iint_G \left( \sqrt{\frac{y}{x}} + \sqrt{xy} \right) d(x, y) &= \iint_H (\sqrt{v} + \sqrt{u}) \frac{1}{2v} d(u, v) \\ &= \int_1^9 \left( \int_1^4 \frac{1}{2\sqrt{v}} + \frac{\sqrt{u}}{2v} dv \right) du \\ &= \int_1^9 \left( \sqrt{v} + \frac{1}{2}\sqrt{u} \ln v \right) \Big|_{v=1}^{v=4} du \\ &= \int_1^9 (1 + \sqrt{u} \ln 2) du \\ &= \left( u + \frac{2}{3}u\sqrt{u} \ln 2 \right) \Big|_1^9 \\ &= 8 + \frac{52}{3} \ln 2. \end{aligned}$$

In het volgende voorbeeld laten we zien dat stelling 7.1.4 met betrekking tot de transformatie naar poolcoördinaten een direct gevolg is van stelling 7.1.5 met betrekking tot algemene transformaties.

**Voorbeeld 7.1.16:** Voor poolcoördinaten geldt  $x(r, \varphi) = r \cos \varphi$  en  $y(r, \varphi) = r \sin \varphi$ , zodat

$$\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial r}(r, \varphi) &= \cos \varphi, \\ \frac{\partial x}{\partial \varphi}(r, \varphi) &= -r \sin \varphi, \\ \frac{\partial y}{\partial r}(r, \varphi) &= \sin \varphi, \\ \frac{\partial y}{\partial \varphi}(r, \varphi) &= r \cos \varphi,\end{aligned}$$

Hieruit volgt dat

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \varphi)} = \det \begin{bmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{bmatrix} = r \cos^2 \varphi + r \sin^2 \varphi = r.$$

Dit is in overeenstemming met de meetkundige berekening uit de vorige paragraaf. —■

### 7.1.7 Numerieke integratie van tweevoudige integralen

Net zoals bij enkelvoudige integralen zijn vele tweevoudige integralen niet analytisch te berekenen. In zulke gevallen zijn we aangewezen op numerieke integratiemethoden voor tweevoudige integralen. Deze methoden zijn gebaseerd op de eerder behandelde methoden voor numerieke benadering van enkelvoudige integralen, te weten de trapeziumregel en de regel van Simpson (zie §5.6). In deze paragraaf zullen we één methode aanreiken: Twee maal toepassen van de Trapeziumregel. Aan de hand hiervan kunnen tamelijk snel een tweetal andere methodes gegeven worden: Twee maal toepassen van de regel van Simpson, of één maal toepassen van de Trapeziumregel en één maal toepassen van de regel van Simpson.

De bedoeling is dat we een integraal van het type

$$\iint_G f(x, y) d(x, y)$$

kunnen benaderen. Het idee is, dat we twee keer de Trapeziumregel toepassen, namelijk een keer op de  $y$ -coördinaten en een keer op de  $x$ -coördinaten.

Neem eerst eens aan dat het gebied  $G$  een rechthoek is:

$$G = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b; c \leq y \leq d\}.$$

Volgens Fubini geldt dan

$$\iint_G f(x, y) d(x, y) = \int_c^d \left( \int_a^b f(x, y) dx \right) dy.$$

Merk op dat de binnenintegraal in feite een functie van  $y$  is! Schrijf daarom even

$$\int_a^b f(x, y) dx = g(y).$$

We zien

$$\iint_G f(x, y) d(x, y) = \int_c^d g(y) dy.$$

Als we de trapeziumregel hierop toepassen, vinden we

$$\int_c^d g(y) dy \approx \frac{1}{2} \Delta y \{g(c) + 2g(c + \Delta y) + 2g(c + 2\Delta y) + \cdots + 2g(c + (n-1)\Delta y) + g(d)\}. \quad (7.8)$$

We hebben het interval  $[c, d]$  hierbij in  $n$  deelintervallen van gelijke lengte verdeeld en  $\Delta y = (d - c)/n$  is de lengte van zo'n deelinterval.

Nu moeten we de uitdrukking  $g(c + k\Delta y)$  nog benaderen. Deze uitdrukking staat voor

$$\int_a^b f(x, c + k\Delta y) dx$$

welke we ook benaderen met de trapeziumregel (Eventueel zouden we ook de regel van Simpson kunnen nemen). Hiertoe verdelen we het interval  $[a, b]$  in  $m$  deelintervallen van gelijke lengte en schrijven we  $\Delta x = (b - a)/m$ . We vinden

$$g(c + k\Delta y) \approx \frac{1}{2} \Delta x \{f(a, c + k\Delta y) + 2f(a + \Delta x, c + k\Delta y) + 2f(a + 2\Delta x, c + k\Delta y) + \cdots + f(b, c + k\Delta y)\}.$$

Nu moeten we dit in 7.8 invullen. Als we dat doen kunnen we een factor  $\frac{1}{2} \Delta x \cdot \frac{1}{2} \Delta y$  buiten haakjes halen, terwijl er binnen de haakjes de som van allemaal uitdrukkingen van het type

$$f(t_{l,k}) = f(a + l\Delta x, b + k\Delta y),$$

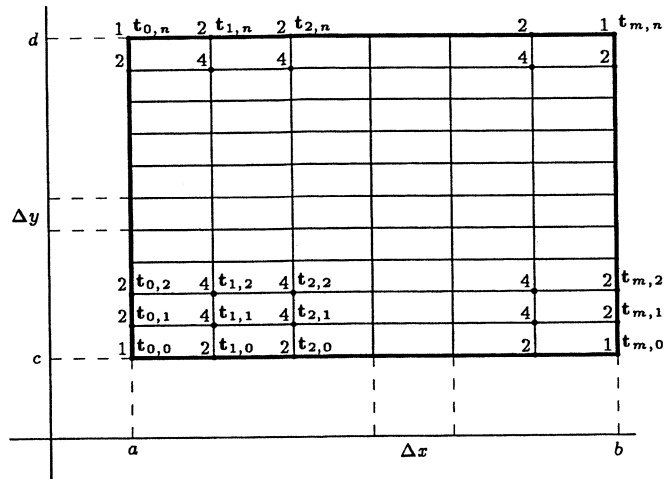
vermenigvuldigt met 1, 2 of 4, staat. We schrijven dit kort in de volgende vorm:

$$\iint_G f(x, y) d(x, y) \approx \frac{1}{4} \Delta x \Delta y \sum_{l=0}^n \sum_{k=0}^m w_{l,k} f(t_{l,k}), \quad (7.9)$$

waarbij de gewichten  $w_{l,k}$  en de steunpunten  $t_{l,k}$  gegeven worden door het "gewichtenschema" van figuur 7.12. Formule 7.9 is de in de inleiding bedoelde numerieke benaderingsmethode.

**Voorbeeld 7.1.17:** We benaderen  $\iint_G f(x, y) d(x, y)$  als  $G = [0, 2] \times [1, 4]$  en  $f(x, y) = xy^2$ . We verdelen de rechthoek in de  $x$ -richting in twee deelintervallen (dus  $m = 2$  en  $\Delta x = 1$ ) en in de  $y$ -richting in 3 intervallen (dus  $n = 3$  en  $\Delta y = 1$ ). Maak zelf het bijbehorende gewichtenschema. Uit dit gewichtenschema lezen we af dat

$$\begin{aligned} \iint_G xy^2 d(x, y) \approx & \frac{1}{4} \{f(0, 1) + 2f(0, 2) + 2f(0, 3) + f(0, 4) + \\ & 2f(1, 1) + 4f(1, 2) + 4f(1, 3) + 2f(1, 4) + \\ & f(2, 1) + 2f(2, 2) + 2f(2, 3) + f(2, 4)\} = 43. \end{aligned}$$



FIGUUR 7.12: Het gewichtenschema bij twee keer toepassen van de trapeziumregel

Ga na dat de exacte waarde 42 is. —■

Het geval dat  $G$  geen rechthoek is behandelen we aan de hand van het volgende voorbeeld. De methode is gelijk aan die voor een rechthoek.

**Voorbeeld 7.1.18:** We benaderen  $\iint_G f(x, y) d(x, y)$  als  $f(x, y) = xy^2$  en  $G = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1; 1 - x^2 \leq y \leq 1 + x^2\}$ . We passen daartoe eerst Fubini toe en zien dat

$$\iint_G f(x, y) d(x, y) = \int_0^1 \left( \int_{1-x^2}^{1+x^2} f(x, y) dy \right) dx.$$

De binnenintegraal is alleen afhankelijk van  $x$  en noemen we daarom even  $g(x)$ . Dan volgt

$$\iint_G f(x, y) d(x, y) = \int_0^1 g(x) dx.$$

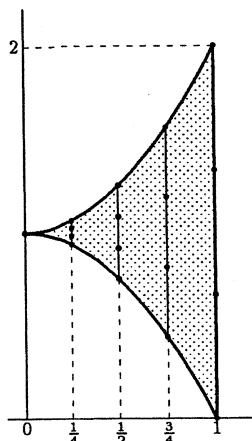
We verdelen het interval  $[0, 1]$  nu in vier deelintervallen van gelijke lengte  $h = 1/4$ . Toepassen van de trapeziumregel levert dan

$$\iint_G f(x, y) d(x, y) \approx \frac{1}{2}h\{g(0) + 2g(\frac{1}{4}) + 2g(\frac{1}{2}) + 2g(\frac{3}{4}) + g(1)\}. \tag{7.10}$$

Nu is

$$\begin{aligned} g(0) &= \int_1^1 f(0, y) dy & g(\frac{1}{4}) &= \int_{15/16}^{17/16} f(\frac{1}{4}, y) dy \\ g(\frac{1}{2}) &= \int_{3/4}^{5/4} f(\frac{1}{2}, y) dy & g(\frac{3}{4}) &= \int_{7/16}^{25/16} f(\frac{3}{4}, y) dy \end{aligned}$$

Op elke van deze integralen kunnen we een numerieke methode toepassen om ze te benaderen. We passen hier op alle integralen weer de trapeziumregel toe en delen elk inte-



FIGUUR 7.13: Het schema behorend bij voorbeeld 7.1.18

gratieinterval in drie deelintervallen van gelijke lengte. We zien

$$\begin{aligned}
 g(0) &= 0; \\
 g\left(\frac{1}{4}\right) &\approx \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{24} \left\{ f\left(\frac{1}{4}, \frac{15}{16}\right) + 2f\left(\frac{1}{4}, \frac{15}{16} + \frac{1}{24}\right) + 2f\left(\frac{1}{4}, \frac{15}{16} + \frac{2}{24}\right) + f\left(\frac{1}{4}, \frac{17}{16}\right) \right\} \\
 g\left(\frac{1}{2}\right) &\approx \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} \left\{ f\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right) + 2f\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4} + \frac{1}{6}\right) + 2f\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4} + \frac{2}{6}\right) + f\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{4}\right) \right\} \\
 g\left(\frac{3}{4}\right) &\approx \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{8} \left\{ f\left(\frac{3}{4}, \frac{7}{16}\right) + 2f\left(\frac{3}{4}, \frac{7}{16} + \frac{3}{8}\right) + 2f\left(\frac{3}{4}, \frac{7}{16} + \frac{6}{8}\right) + f\left(\frac{3}{4}, \frac{25}{16}\right) \right\} \\
 g(1) &\approx \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \left\{ f(1, 0) + 2f\left(1, \frac{2}{3}\right) + 2f\left(1, \frac{4}{3}\right) + f(1, 2) \right\}
 \end{aligned}$$

Als we dit invullen in (7.10) vinden we

$$\begin{aligned}
 \int_G f(x, y) d(x, y) &\approx \\
 &\frac{1}{4} h \left\{ 0 + \right. \\
 &\frac{1}{24} \left( 2f\left(\frac{1}{4}, \frac{15}{16}\right) + 4f\left(\frac{1}{4}, \frac{15}{16} + \frac{1}{24}\right) + 4f\left(\frac{1}{4}, \frac{15}{16} + \frac{2}{24}\right) + 2f\left(\frac{1}{4}, \frac{17}{16}\right) \right) + \\
 &\frac{1}{6} \left( 2f\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right) + 4f\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4} + \frac{1}{6}\right) + 4f\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4} + \frac{2}{6}\right) + 2f\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{4}\right) \right) + \\
 &\frac{3}{8} \left( 2f\left(\frac{3}{4}, \frac{7}{16}\right) + 4f\left(\frac{3}{4}, \frac{7}{16} + \frac{3}{8}\right) + 4f\left(\frac{3}{4}, \frac{7}{16} + \frac{6}{8}\right) + 2f\left(\frac{3}{4}, \frac{25}{16}\right) \right) + \\
 &\left. \frac{2}{3} \left( f(1, 0) + 2f\left(1, \frac{2}{3}\right) + 2f\left(1, \frac{4}{3}\right) + f(1, 2) \right) \right\}
 \end{aligned}$$

Dit is weer te onthouden met een schema, equivalent aan dat voor een rechthoekig gebied. In figuur 7.13 hebben we het schema getekend. Vul zelf de juiste gewichten in en probeer in te zien hoe bovenstaande benadering met de figuur te onthouden is. —■

### OPGAVEN (bij §7.1)

- d 1. Geef een normaalgebied dat geen basisnormaalgebied is.
- h 2. Laat zien dat de volgende gebieden basisnormaalgebieden zijn.
- $G = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1; x + y \geq 1\}$ ;
  - $G = \{(x, y) \mid x^2 - 2x + y^2 \leq 0\}$ ;
  - $G = \{(x, y) \mid x^2 + 3y^2 \leq 3; y \geq x \geq 0\}$ .

t 3. Geef een voorbeeld van een gesloten en begrensd gebied dat geen normaalgebied is.

d 4. Bereken  $\iint_G f \, dA$  waarbij

- (a)  $G = [0, 3] \times [0, 2]$  en  $f(x, y) = 4 - y^2$ ;  
 (b)  $G = [0, 3] \times [-2, 0]$  en  $f(x, y) = x^2y - 2xy$ ;  
 (c)  $G = [\pi, 2\pi] \times [0, \pi]$  en  $f(x, y) = \sin x + \cos x$ ;  
 (d)  $G = [1, \ln 8] \times [0, \ln 2]$  en  $f(x, y) = e^{x+y}$ .

d 5. Bereken de volgende herhaalde integralen.

- (a)  $\int_0^3 \left( \int_{-2}^0 (x^2y - 2xy) \, dy \right) dx$ ;  
 (b)  $\int_1^2 \left( \int_y^{y^2} dx \right) dy$ ;  
 (c)  $\int_1^2 \left( \int_0^{x^3} e^{\frac{y}{x}} \, dy \right) dx$ .

h 6. Bereken  $\iint_G e^{x^2+y^2} xy \, d(x, y)$  met  $G = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1; x \geq 0; y \geq 0\}$ .

h 7. Bereken  $\iint_G xy \, d(x, y)$  met  $G$  de driehoek die begrensd wordt door de hoekpunten  $(0, 0)$ ,  $(1, 2)$  en  $(2, 1)$ .

h 8. Bereken  $\iint_G \sin(x+y)e^{\sin y} \, d(x, y)$  met  $G = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq \pi; 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}\}$ .

t 9. Laat  $B = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$  en  $f(x, y) = f_1(x)f_2(y)$ . Toon aan dat

$$\iint_B f \, dA = \int_{a_1}^{b_1} f_1(x) \, dx \cdot \int_{a_2}^{b_2} f_2(y) \, dy.$$

t 10. (a) Bereken  $\int_0^1 \left( \int_{y\sqrt{\pi}}^{\sqrt{\pi}} \sin x^2 \, dx \right) dy$ .

(b) Bereken  $\int_0^8 \left( \int_{\sqrt[3]{x}}^2 \frac{1}{y^4 + 1} \, dy \right) dx$ .

h 11. Laat zien dat met de definitie van oppervlakte volgt dat de oppervlakte van een

- (a) rechthoek met zijden  $a$  en  $b$  gelijk is aan  $ab$ ;  
 (b) cirkel met straal  $r$  gelijk is aan  $\pi r^2$ ;  
 (c) gebied ingesloten door de  $x$ -as, de lijnen  $x = a$  en  $x = b$ , en de grafiek van een positieve functie  $f$  gelijk is aan

$$\int_a^b f(x) \, dx.$$

t 12. Beschouw stelling 5.5.1 uit hoofdstuk 5. Leidt het resultaat van deze stelling af door uit te gaan van de definitie van oppervlakte.

- t 13. (a) Welk gebied  $G$  in  $\mathbb{R}^2$  maximaliseert de waarde van

$$\iint_G (4 - x^2 - 2y^2) d(x, y)?$$

- (b) Welk gebied  $G$  in  $\mathbb{R}^2$  minimaliseert de waarde van

$$\iint_G (x^2 + y^2 - 9) d(x, y)?$$

- h 14. Bepaal het volume van het lichaam dat ligt onder de paraboloid  $z = x^2 + y^2$  en boven de driehoek die ingesloten wordt door de lijnen  $y = x$ ,  $x = 0$  en  $x + y = 2$ . -14 ?

- h 15. Laat zien dat de oppervlakte  $\Delta G_{ij}$  van het deelgebiedje  $G_{ij}$  uit figuur 7.7 gelijk is aan

$$\Delta G_{ij} = \frac{1}{2}(r_i^2 - r_{i-1}^2)\Delta\varphi,$$

waarbij  $\Delta\varphi = \varphi_j - \varphi_{j-1}$ .

- h 16. Een gebied  $G$  wordt beschreven in poolcoördinaten. Beschrijf de oppervlakte van  $G$  met een tweevoudige integraal.

- h 17. Schets de verzamelingen welke in poolcoördinaten gegeven worden door:

- (a)  $r = 2$ ;
- (b)  $r \leq 2$ ;
- (c)  $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{6}$ ;
- (d)  $r \cos \varphi = 2$ ;
- (e)  $r \cos \varphi + r \sin \varphi = 1$ ;
- (f)  $r^2 = 4r \sin \varphi$ .

- h 18. Beschrijf de volgende verzamelingen in poolcoördinaten:

- (a)  $x = 7$ ;
- (b)  $x - y = 3$ ;
- (c)  $\frac{1}{9}x^2 + \frac{1}{4}y^2 = 1$ ;
- (d)  $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 4$ .

- h 19. Beschrijf de volgende gebieden in poolcoördinaten:

- (a) De cirkelschijf met centrum  $O$  en straal 3;
- (b) De cirkelschijf met centrum  $(1, 0)$  en straal 1;
- (c) Het eenheidsvierkant met de hoekpunten  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$  en  $(0, 1)$ ;
- (d)  $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1, x + y \geq 1\}$ .

- d 20. Schrijf de volgende integralen als herhaalde integraal in poolcoördinaten:

- (a)  $\iint_G \sin(x^2 + y^2) d(x, y)$  met  $G = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4; x \geq 0; y \geq 0\}$ ;
- (b)  $\iint_G \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \ln(x^2 + y^2) d(x, y)$  met  $G = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4; x + y \geq 1\}$ .

$\int_0^{\sqrt{1/2}}$

h 21. Zij  $G = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1; x + y \geq 1\}$ . Bereken  $\iint_G (x^2 + y^2)^{-3/2} d(x, y)$ .

h 22. De kromme  $k$  in  $\mathbb{R}$  is in poolcoördinaten gegeven door  $r = \cos^2 \varphi$  met  $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ .

(a) Schets  $k$ .

(b) Bereken de oppervlakte van het door  $k$  begrensde gebied.

h 23. Zij  $G = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \geq 1; y^2 \leq 4 - 4x; x \geq 0; y \geq 0\}$ . Bereken  $\iint_G \frac{1}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} d(x, y)$ .  
*poolcoördinaten*

h 24. Zij  $G = \{(x, y) \mid x^2 - 2x + y^2 \leq 0\}$ . Bereken  $\iint_G \sqrt{x^2 + y^2} d(x, y)$ .

h 25. Zij  $G = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \geq 4; 0 \leq x \leq 2; 0 \leq y \leq 2\}$ . Bereken  $\iint_G \frac{1}{(x^2 + y^2)^2} d(x, y)$ .

t 26. (a) Beschouw de volgende integraal:

$$I = \int_0^\infty e^{-x^2} dx.$$

Deze oneigenlijke integraal is niet te exact berekenen m.b.v. de technieken die beschreven zijn in hoofdstuk 5. Er is te bewijzen dat

$$\left( \int_0^\infty e^{-x^2} dx \right) \left( \int_0^\infty e^{-y^2} dy \right) = \int_0^\infty \left( \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)} dy \right) dx.$$

Bereken hiermee  $I$ .

(b) Bereken  $\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx$ .

t 27. Beschouw een cilinder waarvan de basis gegeven wordt door het gebied dat ligt binnen de cardioïde welke in pool-coördinaten beschreven wordt door de vergelijking  $r = 1 - \cos \varphi$  en buiten de cirkel met straal 1 en centrum  $(0, 0)$ . De top van de cilinder ligt in het vlak  $z = x$ . Bereken het volume.

t 28. In voorbeeld 7.1.14 hebben we één van de transformatieformules voor de overgang op poolcoördinaten gegeven. Bepaal de andere transformatieformule, dus de inverse van de functie  $t: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  gedefinieerd door

$$t(r, \varphi) = \begin{bmatrix} x(r, \varphi) \\ y(r, \varphi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{bmatrix}.$$

d 29. Bepaal de Jacobianen  $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$  en  $\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}$  voor de transformatie welke gedefinieerd wordt door  $u = x - y$  en  $v = 2x + y$ .

h 30. Gebruik de transformatie  $x = u + \frac{1}{2}v$ ,  $y = v$ , om de volgende integraal te berekenen:

$$\int_0^2 \left( \int_{\frac{y}{2}}^{\frac{y+4}{2}} y^3 (2x - y) e^{(2x-y)^2} dx \right) dy.$$

h 31.  $G$  is het gebied in het 1-ste kwadrant dat begrensd wordt door de krommen met vergelijkingen  $y = \frac{1}{x}$ ,  $y = \frac{4}{x}$ ,  $y = \frac{1}{2}x$  en  $y = 2x$ . Bereken  $\iint_G y^4 e^{y^2/x^2} d(x, y)$ .



- t 32. Zij  $G = \{(x, y) \mid x^2 + 3y^2 \leq 3; y \geq x \geq 0\}$ . Bereken  $\iint_G x^2 d(x, y)$ .
- t 33. Zij  $G = \{(x, y) \mid x \geq 0; y \geq 0; 1 \leq x + y \leq 2\}$ . Bereken  $\iint_G e^{\frac{x-y}{x+y}} d(x, y)$ .
- h 34. Geef het "gewichten-schema" als we  $\iint_G f(x, y) d(x, y)$  met  $G = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b; c \leq y \leq d\}$  numeriek berekenen, waarbij we "verticaal" Simpson en "horizontaal" de trapeziomregel gebruiken.
- r 35. Gegeven de integraal  $\iint_G \sin(x + y)e^{\sin y} d(x, y)$  met  $G = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq \pi; 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}\}$ . We benaderen de integraal met een "dubbele Simpson" waarbij  $m$  het "aantal malen Simpson" is in de  $x$ -richting en  $n$  in de  $y$ -richting. Stel  $n = m = 2^p$  met  $p = 1, 2, 3, 4, 5$ .
- Geef bovengenoemde benaderingen.
  - Deze benaderingen vormen een rij. Schat de convergentie-factor van de rij.
  - Schat m.b.v. de convergentie-factor de onnauwkeurigheid van de laatste benadering.
- r 36. Benader net als in de vorige opgave de volgende integralen en schat de onnauwkeurigheid:
- $\iint_G e^{-(x^2+y^2)} d(x, y)$  met  $G = [1, 0] \times [0, 1]$ ;
  - $\iint_G \arctan(xy) d(x, y)$  met  $G = [1, 0] \times [0, 1]$ ;
  - $\iint_G 3\sqrt{1-x^2-y^2} d(x, y)$  met  $G = \{(x, y) \mid -1 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\}$ .
- r 37. Geef een schatting van  $\iint_{[1,0] \times [0,1]} \sin(x^2 \cos y) d(x, y)$  met een onnauwkeurigheid die kleiner is dan  $10^{-4}$ .

## 7.2 Drievoudige integralen

### 7.2.1 De definitie

De *drievoudige integraal* is een integraalbegrip waarbij een begrensde reëelwaardige functie  $f$  van drie variabelen over een gesloten en begrensd gebied  $G$  binnen het domein van  $f$  geïntegreerd wordt. De definitie van de drievoudige integraal lijkt zeer sterk op die voor een enkelvoudige en een tweevoudige integraal. Echter, een meetkundige betekenis kunnen we niet meer geven, wel een aantal toepassingen.

We zien een drievoudige integraal weer als limiet van Riemansommen behorende bij partities van het gebied  $G$ , waarbij de maaswijdte van die partities naar nul gaat. Wat we doen is het gebied  $G$  ophakken in  $n$  kleine deelgebiedjes  $G_i$  (we verkrijgen zo een *partitie*  $P$  van  $G$ ), waarna we in elk deelgebiedje een (tussen)punt  $t_i$  kiezen. Hiermee maken we de *Riemansom behorend bij de partitie*  $P$ , die luidt

$$\sum_{i=1}^n f(t_i) \Delta V_i$$

waarbij  $\Delta V_i$  het *volume* van het deelgebiedje  $G_i$  voorstelt.

We spreken af dat de *maaswijdte*  $|P|$  van de partitie  $P$  het grootste volume is van de deelgebiedjes die in  $P$  voorkomen. We laten de partities nu zo variëren dat de maaswijdte steeds kleiner wordt en naar nul gaat. Als de Riemansommen

$$\sum_{i=1}^n f(t_i) \Delta V_i$$

dan, onafhankelijk van de keuze van tussenpunten, een vaste waarde benaderen, zeggen we dat de functie  $f$  *integreerbaar* is over  $G$ . De waarde die door de Riemansommen benaderd wordt heet de (*drievoudige*) *integraal van  $f$  over  $G$* . We noteren deze waarde als

$$\iiint_G f \, dV.$$

(De  $V$  staat voor Volume.)

Evenals bij enkelvoudige en bij tweevoudige integralen, kunnen we ons weer afvragen welke functies van drie variabelen integreerbaar zijn en hoe/of we drievoudige integralen kunnen uitrekenen. Met betrekking tot de eerste vraag hebben we een stelling die analoog is aan stelling 7.1.1: Een continue functie van drie variabelen is integreerbaar over een normaalgebied. In de volgende paragraaf gaan we in op het begrip normaalgebied. Op het begrip continue functie gaan we verder niet in, we vertellen alleen dat een functie die in één formule geschreven kan worden, continu is op zijn natuurlijke domein.

Voor de berekening van een drievoudige integraal hebben we twee versies van de stelling van Fubini tot onze beschikking, die behandeld worden in §INSERT.

### 7.2.2 Normaalgebieden

Voordat we de definitie van een normaalgebied geven, bekijken we eerst het volgende voorbeeld:

**Voorbeeld 7.2.1:** Bekijk het gebied  $G = \{(x, y, z) \mid x + y + z \leq 1; x \geq 0; y \geq 0; z \geq 0\}$ . In figuur 7.14 hebben we dit gebied getekend.

Om dit gebied te beschrijven op de manier zoals we dat ook deden bij gebieden in  $\mathbb{R}^2$ , kunnen we op verschillende manieren te werk gaan. De meest gebruikte manier is de volgende, die analoog is aan de methode gebruikt voor de beschrijving van twee-dimensionale normaalgebieden: Kies eerst (bijvoorbeeld) een  $x$ -coördinaat. Deze mag gekozen worden in het interval  $[0, 1]$ . Kies vervolgens een bij deze  $x$  behorende  $y$ -coördinaat. Hiervoor moet gelden  $0 \leq y \leq 1 - x$ . Tenslotte kiezen we een bij deze  $x$  en  $y$  behorende  $z$ -coördinaat, waarvoor dan nog moet gelden dat  $0 \leq z \leq 1 - x - y$ . We concluderen dat

$$G = \{(x, y, z) \mid 0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 1 - x; 0 \leq z \leq 1 - x - y\}.$$

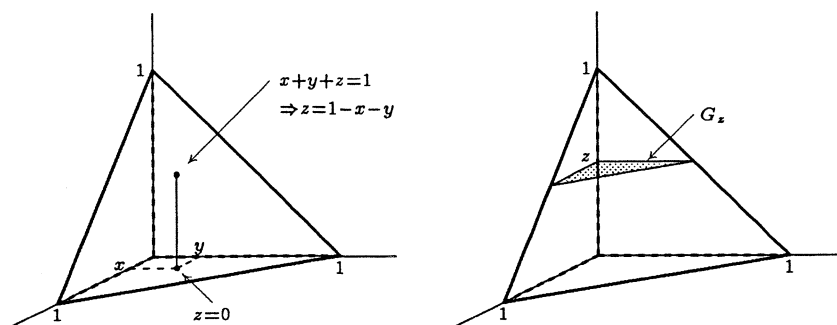
Een andere veel gebruikte manier is de volgende: Projecteer het gebied eerst op het  $x$ - $y$ -vlak. Noem deze projectie  $G_1$ , en kies een punt  $(x, y)$  in  $G_1$ . Zoek vervolgens uit welke waarden  $z$  mag aannemen bij deze keuze van  $(x, y)$ . In ons geval is  $G_1$  de driehoek in het  $x$ - $y$ -vlak met hoekpunten  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$  en  $(0, 1)$ . We kiezen een punt  $(x, y)$  in deze driehoek. In figuur 7.14a hebben we alle punten getekend die tot het gebied behoren, en die  $(x, y)$  tot  $x$ - en  $y$ -coördinaat hebben. Merk op dat de  $z$ -coördinaten van deze punten voldoen aan  $0 \leq z \leq 1 - x - y$ . We kunnen het gebied dus als volgt beschrijven:

$$G = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in G_1; 0 \leq z \leq 1 - x - y\}.$$

Op deze manier hebben we het gebied min of meer in staafjes opgedeeld: Bij elk punt  $(x, y)$  in  $G_1$  een staafje. Merk nog op dat  $G_1$  een normaalgebied in  $\mathbb{R}^2$  is, en beschreven kan worden met de methode van §7.1. Dit leidt bijvoorbeeld tot

$$G_1 = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 1 - x\}.$$

Een derde manier om dit gebied te beschrijven, is een onderverdeling in vlakjes, bi-



FIGUUR 7.14: Het gebied van voorbeeld 7.2.1

voorbeeld evenwijdig aan het  $x$ - $y$ -vlak. De ligging van zo'n vlak wordt bepaald door de

$z$ -coördinaat. We kiezen dus eerst een  $z$ -coördinaat, en wel zo dat er in het gebied punten met deze  $z$ -coördinaat bestaan. In ons voorbeeld moet dan gelden  $0 \leq z \leq 1$ . Het bij de gekozen  $z$  behorende vlakje noemen we  $G_z$  en bestaat uit die punten van  $G$  die juist de gekozen  $z$  tot  $z$ -coördinaat hebben. In figuur 7.14 hebben we zo'n vlakje getekend. Er volgt

$$G = \{(x, y, z) \mid 0 \leq z \leq 1; (x, y) \in G_z\}.$$

Merk op dat voor elke  $z$  geldt dat  $G_z$  gezien kan worden als normaalgebied in het vlak. Ga na dat geldt

$$G_z = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1 - z; 0 \leq y \leq 1 - x - z\}.$$

Naar aanleiding van dit voorbeeld geven we de volgende definitie:

**Definitie:** Een *basisnormaalgebied* in de ruimte is een gesloten begrensde gebied dat op (minstens) één van de volgende manieren te beschrijven is:

1. Er bestaan continue functies  $g$  en  $h$  van één variabele, en er bestaan continue functies  $\varphi_1$  en  $\varphi_2$  van twee variabelen zo dat

$$G = \{(x, y, z) \mid a \leq x \leq b; g(x) \leq y \leq h(x); \varphi_1(x, y) \leq z \leq \varphi_2(x, y)\},$$

of een dergelijke beschrijving met verwisseling van de rollen van  $x$ ,  $y$  en  $z$ .

2. Er bestaan continue functies  $\varphi_1$  en  $\varphi_2$  van twee variabelen zo dat

$$G = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in G_1; \varphi_1(x, y) \leq z \leq \varphi_2(x, y)\}.$$

Hierbij is  $G_1$  een normaalgebied in het vlak ( $G_1$  is de loodrechte projectie van  $G$  op het  $x$ - $y$ -vlak). Een dergelijke beschrijving met verwisseling van de rollen van  $x$ ,  $y$  en  $z$  is uiteraard ook geldig.

3. Er bestaan getallen  $p$  en  $q$  zo dat

$$G = \{(x, y, z) \mid p \leq z \leq q; (x, y) \in G_z\}.$$

Hierbij is  $G_z$  voor elke  $z \in [p, q]$  een normaalgebied in het vlak. Een dergelijke beschrijving met verwisseling van de rollen van  $x$ ,  $y$  en  $z$  is ook geldig.

Een *normaalgebied* in de ruimte is een gebied dat te knippen is in eindig veel basisnormaalgebieden.

### 7.2.3 Integralen over normaalgebieden

In §7.2.1 hebben we al aangekondigd dat een drievoudige integraal van een continue functie over een normaalgebied altijd integreerbaar is. Natuurlijk is de vraag (of en) hoe we zo'n integraal kunnen berekenen. De stelling van Fubini voor drievoudige integralen geeft hierop het antwoord. Deze is analoog aan de stelling van Fubini voor tweevoudige integralen.

**STELLING 7.2.1 (Fubini)** *Laat  $f$  een continue functie van drie variabelen zijn op een basisnormaalgebied  $G$ . Veronderstel dat  $G$  gegeven wordt door*

$$G = \{(x, y, z) \mid a \leq x \leq b; g(x) \leq y \leq h(x); \varphi_1(x, y) \leq z \leq \varphi_2(x, y)\},$$

waarbij  $g$  en  $h$  continue functies  $g$  en  $h$  van één variabele zijn, en  $\varphi_1$  en  $\varphi_2$  continue functies van twee variabelen, óf

$$G = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in G_1; \varphi_1(x, y) \leq z \leq \varphi_2(x, y)\},$$

waarbij  $\varphi_1$  en  $\varphi_2$  continue functies van twee variabelen zijn, en  $G_1$  een normaalgebied in het vlak is, óf

$$G = \{(x, y, z) \mid p \leq z \leq q; (x, y) \in G_z\},$$

waarbij  $p$  en  $q$  getallen zijn en  $G_z$  voor elke  $z \in [p, q]$  een normaalgebied in het vlak is. Dan geldt:

$$\begin{aligned} \iiint_G f \, dV &= \int_a^b \left( \int_{g(x)}^{h(x)} \left( \int_{\varphi_1(x, y)}^{\varphi_2(x, y)} f(x, y, z) \, dz \right) dy \right) dx \\ &= \iint_{G_1} \left( \int_{\varphi_1(x, y)}^{\varphi_2(x, y)} f(x, y, z) \, dz \right) d(x, y) \\ &= \int_p^q \left( \iint_{G_z} f(x, y, z) \, d(x, y) \right) dz \end{aligned}$$

**Opmerking :** Vanwege bovenstaande stelling noteren we ook vaak

$$\iiint_G f \, dV = \iiint_G f(x, y, z) \, d(x, y, z).$$

**Voorbeeld 7.2.2:** We berekenen  $\iiint_G (y^2 + 3z^2) \, d(x, y, z)$ , waarbij  $G$  het gebied uit voorbeeld 7.2.1 is, dus

$$G = \{(x, y, z) \mid x + y + z \leq 1; x \geq 0; y \geq 0; z \geq 0\}.$$

In dat voorbeeld hebben we  $G$  op drie manieren als normaalgebied beschreven. Eén van die manieren was

$$G = \{(x, y, z) \mid 0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 1 - x; 0 \leq z \leq 1 - x - y\}.$$

Met de stelling van Fubini volgt dan

$$\iiint_G (y^2 + 3z^2) \, d(x, y, z) = \int_0^1 \left( \int_0^{1-x} \left( \int_0^{1-x-y} (y^2 + 3z^2) \, dz \right) dy \right) dx.$$

We hebben de drievoudige integraal dus herleid tot een herhaalde integraal, waarbij we drie maal enkelvoudig moeten integreren. Uitwerken geeft

$$\iiint_G (y^2 + 3z^2) \, d(x, y, z) = \int_0^1 \left( \int_0^{1-x} (y^2 z + z^3) \Big|_{z=0}^{z=1-x-y} dy \right) dx$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 \left( \int_0^{1-x} (y^2(1-x-y) + (1-x-y)^3) dy \right) dx \\
&= \int_0^1 \left( \frac{1}{3}y^3(1-x) - \frac{1}{4}y^4 - \frac{1}{4}(1-x-y)^4 \Big|_{y=0}^{y=1-x} \right) dx \\
&= \int_0^1 \frac{1}{3}(1-x)^4 dx \\
&= \frac{1}{15}.
\end{aligned}$$

We eindigen deze paragraaf met de definitie van het begrip volume. Iedereen heeft een (intuïtief) idee bij dit begrip. Het volume van een willekeurig lichaam  $G$  in de ruimte kunnen we benaderen door dit lichaam op te delen in  $n$  kleine deelgebiedjes  $V_i$  (we nemen dus een partitie van  $G$ ) waarvan we de inhoud  $\Delta V_i$  kunnen bepalen (bijvoorbeeld blokjes), en te zeggen dat

$$\text{Vol}(G) \approx \sum_{i=1}^n \Delta V_i.$$

Deze benadering zal beter worden als we een partitie nemen met een kleinere maaswijdte. Merk op dat het hier om Riemanssommen gaat bij de genomen partitie, het gebied  $G$  en de functie  $f$  die constant gelijk is aan 1. We concluderen

$$\text{Opp}(G) = \iiint_G dV.$$

Omdat volume slechts een intuïtief begrip is, wordt bovenstaande uitdrukking als *definitie van volume* (van een lichaam  $G$  in de vlak) genomen.

**Voorbeeld 7.2.3:** Een ellipsoïde wordt gegeven door

$$G = \{(x, y, z) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1\}.$$

Van deze ellipsoïde wordt het volume gedefinieerd door

$$\iiint_G dV$$

Nu geldt

$$G = \{(x, y, z) \mid -c \leq z \leq c; (x, y) \in G_z\}$$

waarbij

$$G_z = \{(x, y, z) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 - \frac{z^2}{c^2}\}.$$

We hebben  $G$  als het ware in plakjes  $G_z$  gesneden, evenwijdig aan het  $x$ - $y$ -vlak. Merk op dat elke  $G_z$  een ellips is. Met Fubini volgt

$$\text{Vol}(G) = \int_{-c}^c \left( \iint_{G_z} d(x, y) \right) dz = \int_{-c}^c \text{Opp}(G_z) dz.$$

Volgens voorbeeld 7.1.9 is de oppervlakte van  $G_z$  gelijk aan  $\pi ab(1 - \frac{z^2}{c^2})$  en dus

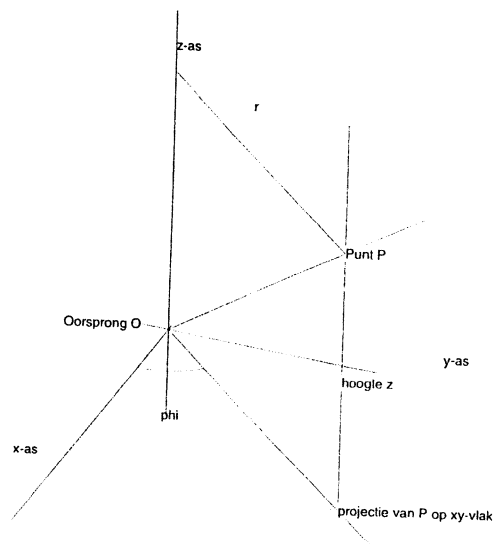
$$\text{Vol}(G) = \int_{-c}^c \pi ab(1 - \frac{z^2}{c^2}) dz = \frac{4}{3} \pi abc.$$

### 7.2.4 Transformaties

Net zoals bij tweevoudige integralen kan het ook bij drievoudige integralen voorkomen dat gebied en/of integrand “vragen” om een beschrijving in andere coördinaten. Hiervoor hebben we dan weer een *coördinatentransformatie* van  $(x, y, z)$ -coördinaten naar  $(u, v, w)$ -coördinaten nodig. Dit is weer een op het gebied  $G$  inverteerbare vectorfunctie  $\mathbf{t}$  van  $\mathbb{R}^3$  naar  $\mathbb{R}^3$ , dus

$$\mathbf{t}(u, v, w) = \begin{bmatrix} x(u, v, w) \\ y(u, v, w) \\ z(u, v, w) \end{bmatrix}.$$

Bij drievoudige integralen spelen twee coördinatentransformaties een hoofdrol. De eerste is de overgang op zogenaamde *cilindercoördinaten*  $(r, \varphi, z)$ . Hierbij beschrijven we de  $x$  en  $y$  coördinaten van een punt  $P$  in de ruimte met poolcoördinaten  $(r, \varphi)$  (waarbij  $r \geq 0$  en  $\varphi \in [0, 2\pi]$ ). De  $z$ -coördinaat veranderen we niet (zie figuur 7.15). De bijbehorende



FIGUUR 7.15: Cilindercoördinaten

coördinatentransformatie wordt dan

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi \\ y &= r \sin \varphi \\ z &= z \end{aligned}$$

of

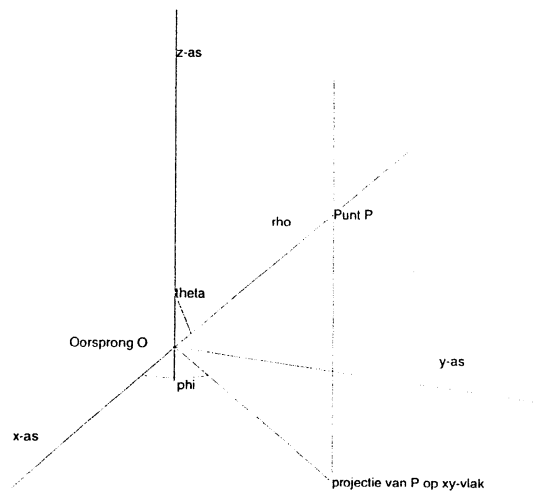
$$\mathbf{t}(r, \varphi, z) = \begin{bmatrix} x(r, \varphi, z) \\ y(r, \varphi, z) \\ z(r, \varphi, z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \\ z \end{bmatrix}.$$

De naam cilindercoördinaten volgt uit het feit dat de punten  $(r, \varphi, z)$  met vaste  $r$  een cilinder beschrijven met de  $z$ -as als as en straal  $r$ .

De tweede belangrijke coördinatentransformatie is de overgang op zogenaamde *bolcoördinaten*  $(\rho, \varphi, \theta)$ , waarbij een punt  $P$  wordt vastgelegd door de getallen  $\rho$ ,  $\varphi$  en  $\theta$  die als volgt zijn gedefinieerd:

1.  $\rho$  is de afstand van  $P$  tot de oorsprong (dus  $\rho \geq 0$ );
2.  $\varphi$  is de hoek tussen de loodrechte projectie van het lijnstuk  $OP$  op het  $(x, y)$ -vlak en de positieve  $x$ -as, waarbij  $\varphi \in [0, 2\pi]$ ;
3.  $\theta$  is de hoek tussen  $OP$  en de positieve  $z$ -as, waarbij  $\theta \in [0, \pi]$ .

(zie figuur 7.16). Ga na dat dan geldt



**FIGUUR 7.16: Bolcoördinaten**

$$\begin{aligned}x &= \rho \sin \theta \cos \varphi \\y &= \rho \sin \theta \sin \varphi \\z &= \rho \cos \theta\end{aligned}$$

of

$$\mathbf{t}(r, \varphi, \theta) = \begin{bmatrix} x(\rho, \varphi, \theta) \\ y(\rho, \varphi, \theta) \\ z(\rho, \varphi, \theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho \sin \theta \cos \varphi \\ \rho \sin \theta \sin \varphi \\ \rho \cos \theta \end{bmatrix}.$$

De naam bolcoördinaten volgt uit het feit dat de punten  $(\rho, \varphi, \theta)$  met vaste  $\rho$  een bol beschrijven met middelpunt de oorsprong en straal  $\rho$ .

**Voorbeeld 7.2.4:** Laat  $G$  het binnengebied van de bol met vergelijking  $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$  zijn. We beschrijven  $G$  in bolcoördinaten. Hiertoe kiezen we eerst  $\theta$  en  $\varphi$ . Uit een schets is direct duidelijk dat  $\varphi$  alle waarden van 0 tot en met  $2\pi$  kan aannemen en dat  $\theta$  alle waarden van 0 tot  $\frac{1}{2}\pi$  kan aannemen. Nu moet we nog een voorwaarde voor  $\rho$  vinden. We



vullen daartoe de transformatieformule in in de formule voor de bol:

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 + (z - 1)^2 &= \rho^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + (\rho \cos^2 \theta - 1)^2 \\ &= \rho^2 \sin^2 \theta + \rho^2 \cos^2 \theta - 2\rho \cos \theta + 1 \\ &= \rho^2 - 2\rho \cos \theta + 1.\end{aligned}$$

Omdat voor  $G$  geldt dat  $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 \leq 1$  volgt dat

$$\rho^2 - 2\rho \cos \theta + 1 \leq 1$$

en dus dat  $\rho \leq 2 \cos \theta$ . De beschrijving van  $G$  in poolcoördinaten wordt dus

$$G = \{(\rho, \varphi, \theta) \mid 0 \leq \varphi \leq 2\pi; 0 \leq \theta \leq \frac{1}{2}\pi; 0 \leq \rho \leq 2 \cos \theta\}$$

Op dezelfde manier als bij tweevoudige integralen, kan ook bij drievoudige integralen de volgende stelling bewezen worden, die het verband geeft tussen integralen over gebieden beschreven in gewone coördinaten en in andere coördinaten.

**STELLING 7.2.2** *Laat  $G$  een normaal gebied in de ruimte zijn en laat*

$$\mathbf{t}(u, v, w) = \begin{bmatrix} x(u, v, w) \\ y(u, v, w) \\ z(u, v, w) \end{bmatrix}$$

*een coördinatentransformatie zijn, waarbij we van  $(x, y, z)$ -coördinaten overgaan op  $(u, v, w)$ -coördinaten. Dan geldt:*

$$\iiint_G f(x, y, z) d(x, y, z) = \iiint_H f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| d(u, v, w)$$

waarbij

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u, v, w) & \frac{\partial x}{\partial v}(u, v, w) & \frac{\partial x}{\partial w}(u, v, w) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u, v, w) & \frac{\partial y}{\partial v}(u, v, w) & \frac{\partial y}{\partial w}(u, v, w) \\ \frac{\partial z}{\partial u}(u, v, w) & \frac{\partial z}{\partial v}(u, v, w) & \frac{\partial z}{\partial w}(u, v, w) \end{bmatrix}.$$

en  $H$  het met  $G$  corresponderende gebied is, beschreven in  $(u, v, w)$ -coördinaten.

We noemen  $\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}$  weer de *Jacobiaan van de transformatie*.

**Voorbeeld 7.2.5:** Voor cilindercoördinaten geldt

$$\begin{aligned}x &= r \cos \varphi \\ y &= r \sin \varphi \\ z &= z\end{aligned}$$

zodat

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \varphi, z)} = \det \begin{bmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = r.$$

**Voorbeeld 7.2.6:** Voor bolcoördinaten geldt

$$\begin{aligned}x &= \rho \sin \theta \cos \varphi \\y &= \rho \sin \theta \sin \varphi \\z &= \rho \cos \theta\end{aligned}$$

zodat

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \theta, \varphi)} = \det \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \rho \cos \theta \cos \varphi & -\rho \sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & \rho \cos \theta \sin \varphi & \rho \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \theta & -\rho \sin \theta & 0 \end{bmatrix}.$$

Ga na dat deze determinant gelijk is aan  $\rho^2 \sin \theta$ .

We eindigen deze paragraaf met twee voorbeelden van berekeningen van integralen met een coördinatentransformatie.

**Voorbeeld 7.2.7:** We bepalen m.b.v. bolcoördinaten het volume van een bol met straal  $R$ . In gewone coördinaten wordt deze bol gegeven door

$$G = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}.$$

Ga na dat dit in bolcoördinaten

$$\{(\rho, \theta, \varphi) \mid 0 \leq \rho \leq R; 0 \leq \varphi \leq 2\pi; 0 \leq \theta \leq \pi\}$$

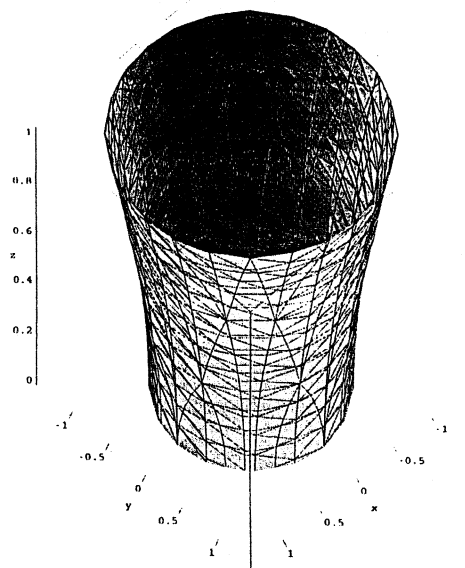
wordt. Het volume van de bol is gelijk aan  $\iiint_G d(x, y, z)$ . Nu is

$$\begin{aligned}\iiint_G d(x, y, z) &= \iiint_H |\rho^2 \sin \theta| d(\rho, \varphi, \theta) \\ &= \int_0^R \left( \int_0^{2\pi} \left( \int_0^\pi |\rho^2 \sin \theta| d\theta \right) d\varphi \right) d\rho \\ &= \int_0^R \left( \int_0^{2\pi} \left( \int_0^\pi \rho^2 \sin \theta d\theta \right) d\varphi \right) d\rho \\ &= 2\pi \int_0^R (-\rho^2 \cos \theta) \Big|_0^\pi d\rho \\ &= 2\pi \int_0^R \rho^2 d\rho \\ &= \frac{4\pi}{3} \rho^3 \Big|_0^R = \frac{4\pi}{3} R^3.\end{aligned}$$

**Voorbeeld 7.2.8:** Zij  $G = \{x, y, z \mid 0 \leq z \leq 1; x^2 + y^2 - z^2 \leq 1\}$ . We berekenen

$$\iiint_G z d(x, y, z).$$

In figuur 7.17 hebben we  $G$  geschetst. Het is een gedeelte van een omwentelingshyper-



FIGUUR 7.17: De omwentelingshyperboloïde

boloïde. De beschrijving van  $G$  in cilindercoördinaten is

$$H = \{(r, \varphi, z) \mid 0 \leq \varphi \leq 2\pi; 0 \leq z \leq 1; 0 \leq r \leq \sqrt{1+z^2}\}.$$

Hieruit volgt

$$\begin{aligned} \iiint_G z d(x, y, z) &= \iiint_H zr d(r, \varphi, z) \\ &= \int_0^{2\pi} \left( \int_0^1 \left( \int_0^{\sqrt{1+z^2}} zr dr \right) dz \right) d\varphi \\ &= \frac{3}{4}\pi. \end{aligned}$$

### OPGAVEN (bij §7.2)

d 38. Schrijf  $\iiint_G f(P)dV$  als herhaalde integraal als

(a)  $G = \{(x, y, z) \mid x + y + z \leq 1 \text{ en } x \geq 0 \text{ en } y \geq 0 \text{ en } z \geq 0\}$ ;

(b)  $G = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \text{ en } z \geq 0\}$ ;

(c)  $G = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq 1 \text{ en } x^2 + z^2 \leq 1\}$ .

h 39. Bereken  $\iiint_G \frac{1}{(1+x+y+z)^3} dv$  als  $G = \{(x, y, z) \mid x + y + z \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$ .

- t 40. Gegeven twee cilinders die waarvan de assen elkaar  $\perp$  snijden.
- Bereken de inhoud van de door de cilinders ingesloten ruimte  $V$  m.b.v. Fubini I.
  - Beschrijf de doorsnede van  $V$  met vlak  $x = a$  waarbij  $-1 \leq a \leq 1$ .
  - Bereken de inhoud m.b.v. Fubini II.
- t 41. Gegeven een piramide waarvan de hoogte gelijk is aan  $h$  en de oppervlakte van het grondvlak gelijk is aan  $A$ .  
Laat zien dat de inhoud gegeven wordt door  $\frac{1}{3}hA$ .
- d 42. De volgende tabel geeft van punten uit de ruimte hun rechthoekige of cilindrische coördinaten of bolcoördinaten. Gevraagd wordt de coördinaten te geven t.o.v. de andere coördinaat-systemen.

Rechthoekig	Cilindrisch	Bol
$(x, y, z)$	$(r, \varphi, z)$	$(\rho, \varphi, \theta)$
$(0, 0, 0)$		
$(1, 0, 0)$		
$(0, 1, 0)$		
$(0, 0, 1)$		
	$(1, 0, 0)$	
	$(\sqrt{3}, 0, 1)$	
	$(1, \pi/2, 1)$	
		$(\sqrt{3}, -\pi/2, \pi/3)$
		$(2\sqrt{2}, 3\pi/2, \pi/2)$
		$(\sqrt{2}, 3\pi/2, \pi)$

- d 43. Beschrijf of teken de verzamelingen die hetzij in rechthoekige coördinaten, hetzij in cilindrische coördinaten, hetzij in bolcoördinaten gegeven worden door de vergelijkingen.
- $z = 0$
  - $x^2 + y^2 = 5$
  - $z = \sqrt{x^2 + y^2}$
  - $\rho \sin \varphi \sin \theta = 0$
  - $z = 4 - 4r^2$
  - $\rho = 2$
  - $z^2 - r^2 = 1$
- d 44. (a) Geef een vergelijking in cilindercoördinaten corresponderende met vergelijking  $x^2 + y^2 = a^2$ .  
(b) Hetzelfde als in a) maar nu in bolcoördinaten.
- d 45. Beschrijf
- $G = \{(x, y, z) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9 \text{ en } 0 \leq z \leq \sqrt{25 - x^2 - y^2}\}$  in cilindercoördinaten.
  - $G = \{(x, y, z) \mid z \geq \sqrt{3} \text{ en } x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$  in bolcoördinaten.

h 46. Laat  $G = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq 0\}$ .

Bereken  $\iiint_G (x^2 + y^2) dV$

(a) m.b.v. cilinder coördinaten

(b) m.b.v. bolcoördinaten.

h 47. Bepaal  $\iiint_G f(P) dV$  als  $f(r, \theta, z) = r$  en  $G$  het gebied dat ingesloten wordt door  $r^2 + z^2 = 1$ .

h 48. Bepaal  $\iiint_G f(P) dV$  als  $f(\rho, \varphi, \theta) = \rho$  en  $G$  het gebied dat ingesloten wordt door  $0 \leq \rho \leq 1$ .



## Hoofdstuk 8

# Uiterste waarden van functies van twee variabelen

### 8.1 Inleiding

Bij een aantal problemen is het van belang om uiterste waarden te bepalen van een functie van meerdere variabelen op een zeker gebied. We geven een tweetal voorbeelden:

**Voorbeeld 8.1.1:** De temperatuursverdeling in de ruimte wordt gegeven door de functie van drie variabelen  $T(x, y, z) = xyz$ . Gevraagd wordt de maximum- en minimumtemperatuur op de bol  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ . —■

**Voorbeeld 8.1.2:** Gegeven de hyperbolische cilinder  $x^2 - z^2 - 1 = 0$ . Bepaal de punten op de cilinder waarvan de afstand tot de oorsprong minimaal is. —■

Om deze voorbeelden te kunnen oplossen is het nodig om een aantal begrippen in te voeren. Dit zijn: het raakvlak aan de grafiek van een functie van twee variabelen, richtingsafgeleiden en de gradiënt van een functie. Deze worden in de volgende paragraaf behandeld. In de derde paragraaf wordt een aantal methoden gegeven om uiterste waarden van functies van twee variabelen te bepalen. Om deze te kunnen toepassen moeten de functies voldoende “glad” zijn, dit is, afhankelijk van de methode,  $n$ -maal continu differentieerbaar. Nu zijn continuïteit en differentieerbaarheid van functies van twee variabelen lastige begrippen. We zullen hieraan dan ook geen aandacht besteden. Voor enig houvast definiëren we een zeer beperkte klasse  $\mathcal{G}$  van zogenaamde gladde functies op  $\mathbb{R}^2$  waarop het hierna volgende zeker toepasbaar is.

**Definitie:** Een functie  $h : D_h \rightarrow \mathbb{R}$  met  $D_h$  een open deelverzameling van  $\mathbb{R}^2$  is een element van  $\mathcal{G}$  als het voorschrift van  $h$  een lineaire combinatie is van functies  $f \circ g : D_h \rightarrow \mathbb{R}$  waarbij  $g$  een polynoomfunctie of rationale functie is op  $D_h$  en  $f$  een tweemaal continu-differentieerbare functie is op  $g(D_h) \subset \mathbb{R}$  (het beeld van  $D_h$  onder  $g$ ).

**Toelichting:** Onder een polynoomfunctie van twee variabelen verstaan we een functie gedefinieerd door een uitdrukking waarin alleen vermenigvuldigd, opgeteld en/of afgetrokken wordt. Zo komen uitdrukkingen als  $xy^3$ ,  $x^3 + y^3 + 2x - 7$ ,  $x$  en  $xy$  overeen

met polynoomfuncties, en uitdrukkingen als  $\cos xy$ ,  $\sqrt{xy}$ , en  $\frac{x}{yz}$  niet. Onder een rationale functie verstaan we een functie waarvan het voorschrift gegeven wordt door een quotiënt van twee polynomen. Zo komen uitdrukkingen als  $\frac{xy}{x^2+y^3+x+7}$  en  $\frac{xy}{x+y}$  overeen met rationale functies en uitdrukkingen als  $\frac{\cos x + \sin x}{x^2}$  en  $\frac{x}{x+\sqrt{y}}$  niet.

**Voorbeeld 8.1.3:** Ga na dat de volgende functies elementen zijn van de klasse  $\mathcal{G}$ .

- $x^2 + y^2$  op  $\mathbb{R}^2$ .
- $\frac{x^2+y^2}{x-y}$  op  $\mathbb{R}^2$  met uitzondering van de lijn  $y = x$ .
- $\sin(x^2 + y^2)$  op  $\mathbb{R}^2$ .
- $2 \sin(x^2 + y^2) + \frac{x^2+y^2}{x-y}$  op  $\mathbb{R}^2$  met uitzondering van de punten op de lijn  $y = x$ .
- $\sqrt{x^2 + y^2}$  op  $\mathbb{R}^2$  m.u.v. het punt  $(0,0)$ .

## 8.2 Raakvlak, gradiënt en richtingsafgeleide

### 8.2.1 Raakvlak

Gegeven is de functie van twee variabelen  $f(x, y)$ . Laat  $(x_0, y_0)$  een punt zijn van het domein van  $f$ . We willen de vergelijking bepalen van het raakvlak aan de grafiek in punt  $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ . Dit probleem is in voorbeeld 6.5.4 al aan de orde geweest. De parametervoorstelling van het genoemde raakvlak, zeg  $\alpha$ , wordt gegeven door:

$$\alpha : \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ f(x_0, y_0) \end{bmatrix} + \lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ f_x(x_0, y_0) \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ f_y(x_0, y_0) \end{bmatrix}; \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

Met behulp van deze parametervoorstelling kunnen we de vergelijking van het raakvlak opstellen. De vergelijking van dit vlak is van de vorm  $ax + by + cz = d$  waarbij  $a$ ,  $b$  en  $c$  gegeven kunnen worden door het uitwendig product

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ f_x(x_0, y_0) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ f_y(x_0, y_0) \end{bmatrix}$$

en  $d$  bepaald wordt door het gegeven dat  $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$  een punt van het vlak is. We komen na enig rekenwerk tot het volgende resultaat:

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) \quad (8.1)$$

Het linkerlid van vergelijking (8.1) wordt ook wel *de linearisering van  $f$  om het punt  $(x_0, y_0)$*  genoemd. Deze linearisering wordt vaak gebruikt bij fouten analyses. Zie hierover de onderstaande voorbeelden.



**Voorbeeld 8.2.1:** Gegeven zijn de functies  $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2$  (een paraboloid) en  $g(x, y) = 4 - x$  (een vlak). Laat  $k$  de snijkromme zijn van de grafieken van  $f$  en  $g$  waarvan  $P = (0, \sqrt{6}, 4)$  een punt is. Bepaal een parametervoorstelling van de raaklijn  $l$  door  $P$  aan de kromme  $k$ .

Voor een parametervoorstelling zijn nodig een steunvector en een richtingsvector. Als steunvector kiezen we de vector  $(0, \sqrt{6}, 4)$ . De richtingsvector van  $l$  staat loodrecht op beide normalen van de raakvlakken aan de grafieken van  $f$  en  $g$  in punt  $P$ . Derhalve wordt een richtingsvector van  $l$  gegeven door:

$$\begin{bmatrix} -f_x(P) \\ -f_y(P) \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -g_x(P) \\ -g_y(P) \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2\sqrt{6} \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\sqrt{6} \\ 1 \\ 2\sqrt{6} \end{bmatrix}.$$

Een parametervoorstelling van  $l$  wordt nu gegeven door:

$$l: \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{6} \\ 4 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} -2\sqrt{6} \\ 1 \\ 2\sqrt{6} \end{bmatrix}; \lambda \in \mathbb{R}$$

Zoals in de theorie reeds is opgemerkt speelt de linearisering een rol bij de foutenanalyse. Hiervan geven we een voorbeeld.

**Voorbeeld 8.2.2:** Stel dat we de weerstand willen bepalen van een zeker apparaat. Daartoe meten we de stroomsterkte  $I$  door het apparaat en de spanning  $V$  over het apparaat. De meetwaarde van  $I$  is  $I_0$  met meetfout  $\Delta I_0$  en die van  $V$  is  $V_0$  met meetfout  $\Delta V_0$ . De weerstand  $R$  bepalen we met de wet van Ohm welke gegeven wordt door de formule  $R = \frac{V}{I}$ . De weerstandswaarde  $R_0$  is dus  $\frac{V_0}{I_0}$ .

Probleem: Wat is nu de onzekerheid in  $R_0$  ten gevolge van de onzekerheden in de stroomsterkte en de spanning? Met behulp van de linearisering van de functie  $f(I, V) = \frac{V}{I}$  komen we tot een schatting van deze onzekerheid. Er geldt dat

$$f(I, V) \approx f(I_0, V_0) + f_I(I_0, V_0)(I - I_0) + f_V(I_0, V_0)(V - V_0) = \frac{V_0}{I_0} - \frac{V_0}{I_0^2}(I - I_0) + \frac{1}{I_0}(V - V_0)$$

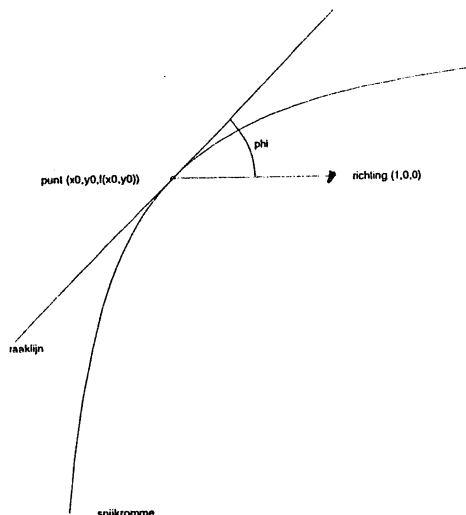
mits  $(I, V)$  in de buurt ligt van  $(I_0, V_0)$ . Dus

$$f(I_0 + \Delta I_0, V_0 + \Delta V_0) \approx f(I_0, V_0) - \frac{V_0}{I_0^2} \Delta I_0 + \frac{1}{I_0} \Delta V_0$$

zodat we de onzekerheid  $\Delta R_0 = f(I_0 + \Delta I_0, V_0 + \Delta V_0) - f(I_0, V_0)$  schatten op  $-\frac{V_0}{I_0^2} \Delta I_0 + \frac{1}{I_0} \Delta V_0$ . Vaak is men ook onzeker over het teken van  $\Delta V_0$  en  $\Delta I_0$ . Dan is het handig om  $|\Delta R_0|$  te schatten en het resultaat te noteren als  $R = R_0 \pm |\Delta R_0|$  waarbij we  $|\Delta R_0|$  schatten op  $|\frac{V_0}{I_0^2} \Delta I_0| + \frac{1}{I_0} |\Delta V_0|$ . Als de meetresultaten gegeven worden door  $I_0 = 3 \pm 0.01$  Ampère en  $V_0 = 12 \pm 0.1$  Volt dan is weerstand van het apparaat 4 Ohm waarbij de onzekerheid geschat wordt op  $\frac{12}{9} 0.01 + \frac{1}{3} 0.1 \approx 0.05$  Ohm. Dus  $R = 4.00 \pm 0.05$  Ohm.

### 8.2.2 Gradiënt en richtingsafgeleide

In paragraaf 6.5 hebben we meetkundige interpretaties gegeven voor de partiële afgeleiden  $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$  en  $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ . Zo is  $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$  gelijk aan  $\tan \varphi$  waarbij  $\varphi$  de hoek is tussen de raaklijn aan de snijkromme van het vlak  $y = y_0$  met de grafiek welke gedefinieerd wordt door de vergelijking  $z = f(x, y)$  in het punt  $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$  en  $(1, 0, 0)$  waarbij we  $(1, 0, 0)$  laten aangrijpen in punt  $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ . Zie hiervoor figuur 8.1. I.p.v. de opstaande



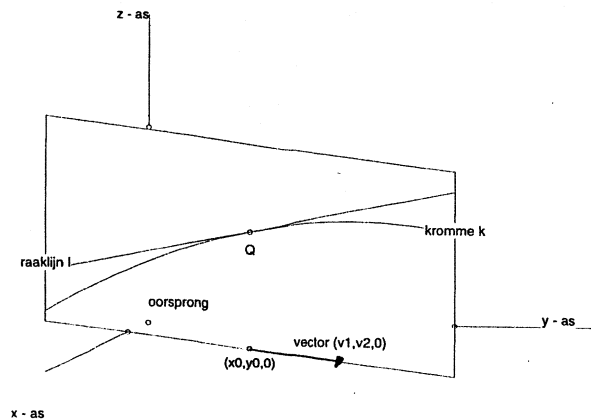
FIGUUR 8.1: Hoek  $\varphi$

vlakken, dat zijn vlakken loodrecht op het  $XY$ -vlak, evenwijdig aan de  $x$ -as of  $y$ -as te kiezen kiezen we ze in een willekeurige richting. Deze vlakken vormen een zogenaamde vlakkenwaaier waarvan de as loodrecht staat op het  $XY$ -vlak door het punt  $(x_0, y_0, 0)$ . Elk van deze vlakken definieert een snijkromme  $k$  met de grafiek van  $f$ , die door het punt  $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$  gaat. Laat  $\alpha$  nu zo'n opstaand vlak zijn (zie figuur 8.2) in de richting  $(v_1, v_2, 0)$  en  $l$  de bijbehorende raaklijn door het punt  $Q = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$  aan  $k$ . Gevraagd:  $\tan \varphi$ , waarbij  $\varphi$  de hoek is tussen  $l$  en  $(v_1, v_2, 0)$  waarbij  $(v_1, v_2, 0)$  aangrijpt in  $Q$  gemeten zoals in figuur 8.3 is aangegeven. Omdat  $l$  in het raakvlak ligt van de grafiek van  $f$  in punt  $Q$  geldt dat een richtingsvector  $\mathbf{r}$  van  $l$  loodrecht staat op

$$\begin{bmatrix} -f_x(x_0, y_0) \\ -f_y(x_0, y_0) \\ 1 \end{bmatrix}$$

(zie vergelijking (8.1)). Omdat  $l$  ook in vlak  $\alpha$  ligt, geldt dat  $\mathbf{r}$  ook loodrecht staat op

$$\begin{bmatrix} -v_2 \\ v_1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

FIGUUR 8.2: Doorsnijding van vlak  $\alpha$  met grafiek van  $f$ 

zodat  $\mathbf{r}$  gegeven wordt door

$$\begin{bmatrix} -v_2 \\ v_1 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -f_x(x_0, y_0) \\ -f_y(x_0, y_0) \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_1 f_x(x_0, y_0) + v_2 f_y(x_0, y_0) \end{bmatrix}.$$

Omdat  $(v_1, v_2, 0)$  de loodrechte projectie op het  $(x, y)$ -vlak is van  $\mathbf{r}$  geldt dat

$$\tan \varphi = v_1 f_x(x_0, y_0) + v_2 f_y(x_0, y_0)$$

als  $v_1^2 + v_2^2 = 1$  (zie figuur 8.4). Het rechterlid van de laatste vergelijking speelt in het vervolg een belangrijke rol en wordt de richtingsafgeleide van  $f$  in  $(x_0, y_0)$  in de richting van  $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$  genoemd. In de volgende definitie voeren we een notatie voor de richtingsafgeleide in en tevens het begrip gradiënt.

**Definitie:** De *gradiënt van  $f$  in  $(x_0, y_0)$*  (notatie  $\nabla f(x_0, y_0)$ ) is de vector

$$\nabla f(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} f_x(x_0, y_0) \\ f_y(x_0, y_0) \end{bmatrix}.$$

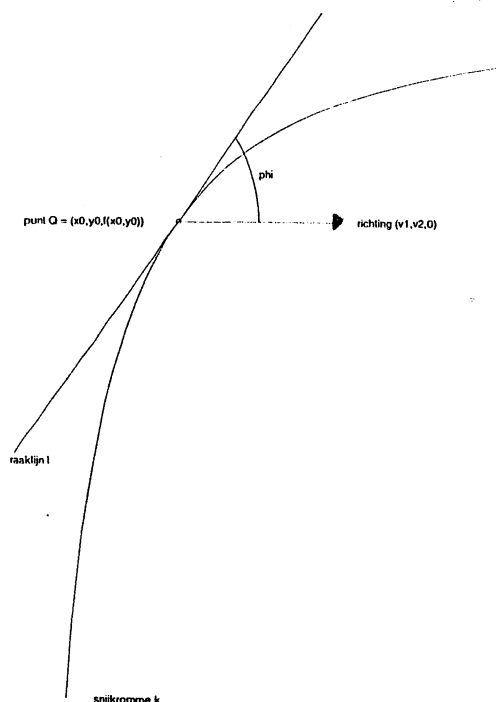
De *richtingsafgeleide van  $f$  in  $(x_0, y_0)$  in de richting van  $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$*  (notatie  $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(x_0, y_0)$ ) is het getal

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot \mathbf{v} \quad (8.2)$$

waarbij  $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$  met  $v_1^2 + v_2^2 = 1$ .

**Opmerkingen:**

1. Als  $\mathbf{v}=(1, 0)$  geldt dat  $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(x_0, y_0)$  gelijk is aan  $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$  en als  $\mathbf{v}=(0, 1)$  geldt dat  $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(x_0, y_0)$  gelijk is aan  $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ .
2. De gradiënt  $\nabla f(x_0, y_0)$  en  $\mathbf{v}=(v_1, v_2)$  zijn twee vectoren uit  $\mathbb{R}^2$ . Vaak worden ze in figuren aangegeven in het domein van  $f$ . Zie hiervoor figuur 8.5.

FIGUUR 8.3: Hoek  $\varphi$ 

**Voorbeeld 8.2.3:** Gegeven is de functie  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Dan is de gradiënt  $\nabla f(x, y)$  gelijk aan  $\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)$ . Als  $\mathbf{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$  dan is  $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(x, y) = \frac{x}{\sqrt{2(x^2 + y^2)}} + \frac{y}{\sqrt{2(x^2 + y^2)}}$ . Als  $\mathbf{v} = (1, 0)$  dan is  $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$  en als  $\mathbf{v} = (0, 1)$  dan is  $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ . ▬

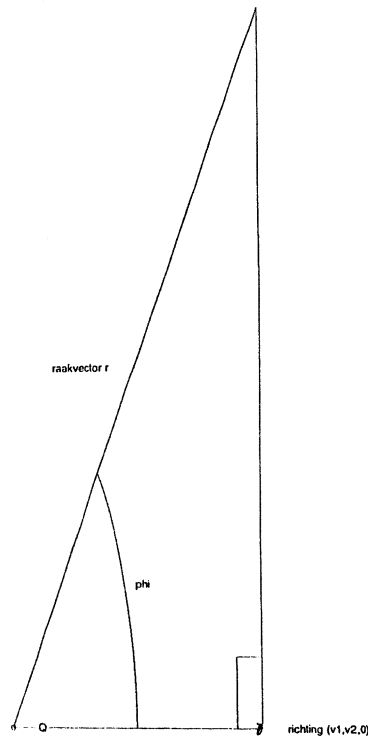
Gegeven is de niveaukromme  $k$  gedefinieerd door  $f(x, y) = c$  waarbij  $f$  een functie is uit  $\mathcal{G}$  en  $c$  een element van  $\mathbb{R}$ . Laat  $(x_0, y_0)$  een punt op de kromme zijn waarvoor  $\nabla f(x_0, y_0) \neq 0$ . Zie hiervoor figuur 8.6. Laat  $\mathbf{v}$  een eenheidsvector zijn die aangrijpt in  $(x_0, y_0)$  en laat  $\alpha \in [0, \pi]$  de hoek zijn tussen  $\mathbf{v}$  en  $\nabla f(x_0, y_0)$ . Omdat

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot \mathbf{v} = \|\nabla f(x_0, y_0)\| \|\mathbf{v}\| \cos \alpha = \|\nabla f(x_0, y_0)\| \cos \alpha$$

geldt dat

- $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(x_0, y_0) > 0$  als  $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2})$ ,
- $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(x_0, y_0) < 0$  als  $\alpha \in (\frac{\pi}{2}, \pi]$  en
- $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(x_0, y_0) = 0$  als  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ .

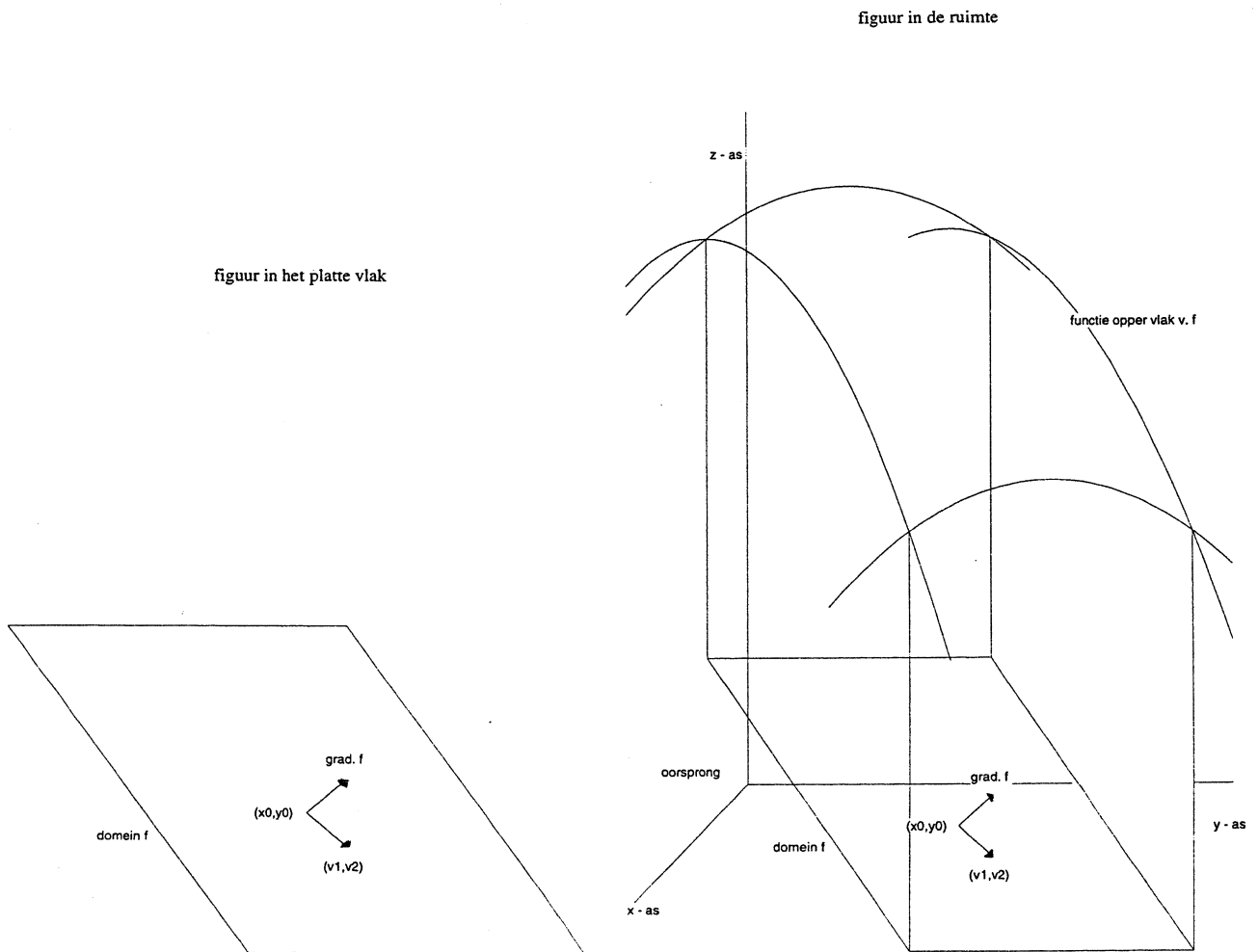
Omdat  $k$  een niveaukromme is van  $f$  is het aannemelijk dat als  $\mathbf{v}$  raakt aan  $k$  dat  $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(x_0, y_0)$  gelijk is aan 0. Derhalve staat  $\nabla f(x_0, y_0)$  loodrecht op de raaklijn  $l$  aan de kromme

FIGUUR 8.4:  $\tan \varphi$ 

$k$  in punt  $(x_0, y_0)$ . Zie hiervoor figuur 8.7. Uit deze figuur is ook op te maken dat er een omgeving  $O$  (bijvoorbeeld een cirkelschijf) van het punt  $(x_0, y_0)$  is welke door  $k$  opgedeeld wordt in twee gebieden  $O_1$  en  $O_2$  met de eigenschap dat  $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0, y_0) < c$  op  $O_1$  en  $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0, y_0) > c$  op  $O_2$ . Zie hiervoor figuur 8.8.

### 8.3 Extremen van functies van twee variabelen

In deze paragraaf bespreken we een aantal methoden om uiterste waarden te bepalen van functies van twee variabelen. Alvorens deze te bespreken definiëren we wat we onder een extreem verstaan. Laat  $D_f$  het domein zijn van een functie  $f(x, y)$ .  $f(a, b)$  heet een *lokaal maximum van  $f$*  als er een omgeving  $O$  van  $(a, b)$  in  $D_f$  is waarvoor geldt: Als  $(x, y) \in O$  dan is  $f(x, y) \leq f(a, b)$ . Zo ook is  $f(a, b)$  een *lokaal minimum van  $f$*  als er een omgeving  $O$  van  $(a, b)$  in  $D_f$  is waarvoor geldt: Als  $(x, y) \in O$  dan is  $f(x, y) \geq f(a, b)$ . Als  $f(a, b) \geq f(x, y)$  voor alle  $(x, y)$  uit  $D_f$  dan noemen we  $f(a, b)$  een *globaal maximum* en als  $f(a, b) \leq f(x, y)$  voor alle  $(x, y)$  uit  $D_f$  dan noemen we  $f(a, b)$  een *globaal minimum*. We merken hierbij op dat een globaal extreem ook een lokaal extreem is. Vaak maakt men ook nog onderscheid tussen zogenaamde vrije extremen en randextremen. Onder een *vrij extreem* verstaan we een extreem dat op inwendige punten van  $D_f$  wordt aangenomen en onder een *randextreem* verstaan we een extreem dat in een randpunt van  $D_f$  wordt aangenomen. Nu zijn randpunten en inwendige punten van  $D_f$  wiskundig lastige begrippen. We volstaan



**FIGUUR 8.5:** Schets van de gradiënt in  $\mathbb{R}^2$  en  $\mathbb{R}^3$

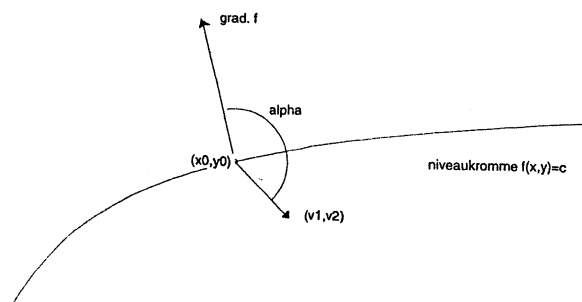
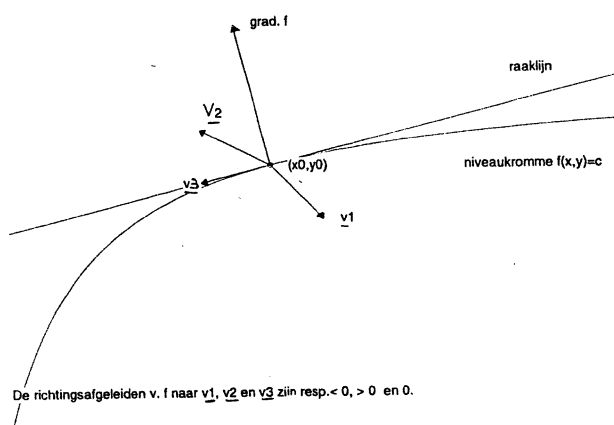
met enkele voorbeelden welke dienen om een intuïtief idee van de genoemde begrippen geven.

**Voorbeeld 8.3.1:** Laat  $D_f$  de eenheidscircelschijf  $x^2 + y^2 \leq 1$  zijn. De randpunten van  $D_f$ , in het vervolg *de rand van  $D_f$*  genoemd, worden gegeven door  $x^2 + y^2 = 1$  en de inwendige punten van  $D_f$ , in het vervolg *het inwendige van  $D_f$*  genoemd, worden gegeven door  $x^2 + y^2 < 1$ . —■

**Voorbeeld 8.3.2:** Als  $D_f$  gedefinieerd wordt door  $x^2 + y^2 < 1$  dan heeft  $D_f$  alleen inwendige punten. —■

**Voorbeeld 8.3.3:** Stel  $D_f$  wordt gegeven door  $x^2 + y^2 > 0$ . Dan wordt de rand gegeven door  $(0, 0)$ . —■

**Voorbeeld 8.3.4:** Stel dat  $D_f$  overeenkomt met de eenheidscirkel dan bestaat  $D_f$  uit louter randpunten n.l. de eenheidscirkel zelf.  $D_f$  bevat geen inwendige punten. —■

FIGUUR 8.6: Positie van gradiënt t.o.v. niveaulijn van  $f$ FIGUUR 8.7: Het teken van  $\frac{\partial}{\partial v} f(x_0, y_0)$ 

Vervolgens geven aantal voorbeelden m.b.t. uiterste waarden.

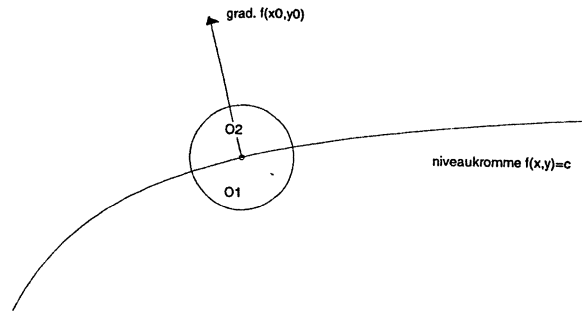
**Voorbeeld 8.3.5:** Laat  $f$  gegeven worden door  $x^2 + y^2$  met domein  $\mathbb{R}^2$ . Dan is  $f(0, 0) = 0$  een globaal vrij extreem (minimum) omdat  $x^2 + y^2 \geq 0$  op  $\mathbb{R}^2$ . —

**Voorbeeld 8.3.6:** Zie vorig voorbeeld maar nu is  $D_f$  gelijk aan de eenheidscirkelschijf. Wederom is  $f(0, 0)$  een globaal vrij extreem. Het globale randmaximum is 1. Dit maximum wordt aangenomen op de eenheidscirkel. —

**Voorbeeld 8.3.7:** Gegeven  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}(\sqrt{x^2 + y^2} - 1)(\sqrt{x^2 + y^2} - 2)$  en  $D_f = \mathbb{R}^2$ . De grafiek van  $f$  ontstaat door de grafiek van functie  $g$  op  $\mathbb{R}_0^+$  welke gegeven wordt door  $g(x) = x(x - 1)(x - 2)$  te wentelen om de  $y$ -as. Zie hiervoor figuur 8.9. Ga na dat een lokaal maximum aangenomen wordt op de verzameling  $x^2 + y^2 = 1 - \frac{1}{3\sqrt{3}}$  en een globaal minimum op  $x^2 + y^2 = 1 - \frac{1}{3\sqrt{3}}$ . Verder is 0 een lokaal minimum dat aangenomen wordt in  $(0, 0)$ . —

### 8.3.1 Berekening van vrije extremen

Stel  $f(a, b)$  is een vrij extreem. Dan is het raakvlak aan de grafiek van  $f$  in het punt  $(a, b, f(a, b))$  evenwijdig aan het  $XY$ -vlak. Omdat  $(1, -f_x(a, b), f_y(a, b))$  een normaal van

FIGUUR 8.8: Omgeving  $O$ 

het raakvlak is (zie vergelijking (8.1)), geldt dat zowel  $f_x(a, b)$  als  $f_y(a, b)$  gelijk aan 0 zijn. Zo komen we tot de volgende stelling:

**STELLING 8.3.1** *Als  $f$  een functie is uit  $G$  en  $f(x_0, y_0)$  is een vrij extreem dan geldt dat  $(x_0, y_0)$  een oplossing is van het stelsel  $S$  dat gegeven wordt door:*

$$\begin{cases} f_x(x, y) = 0 \\ f_y(x, y) = 0 \end{cases}$$

De oplossingen van  $S$  worden de *stationaire punten* van  $f$  genoemd. We merken op dat bij stationaire punten niet per se uiterste waarden liggen. Beschouw daartoe het volgende voorbeeld:

**Voorbeeld 8.3.8:** Gegeven is op  $\mathbb{R}^2$  de functie  $g(x, y) = x^2 - y^2$ . De stationaire punten worden gegeven door de oplossingsverzameling van

$$\begin{cases} 2x = 0 \\ -2y = 0 \end{cases}$$

Dus  $(0, 0)$  is het enige stationaire punt. Nu blijkt uit het tekenschema van  $g$  (zie figuur 8.10) dat elke omgeving van  $(0, 0)$  zowel punten bevat waarop  $g$  negatieve waarden aanneemt als punten waarop  $g$  positieve waarden aanneemt. Omdat  $g(0, 0) = 0$  ligt er bij  $(0, 0)$  geen uiterste waarde. —■

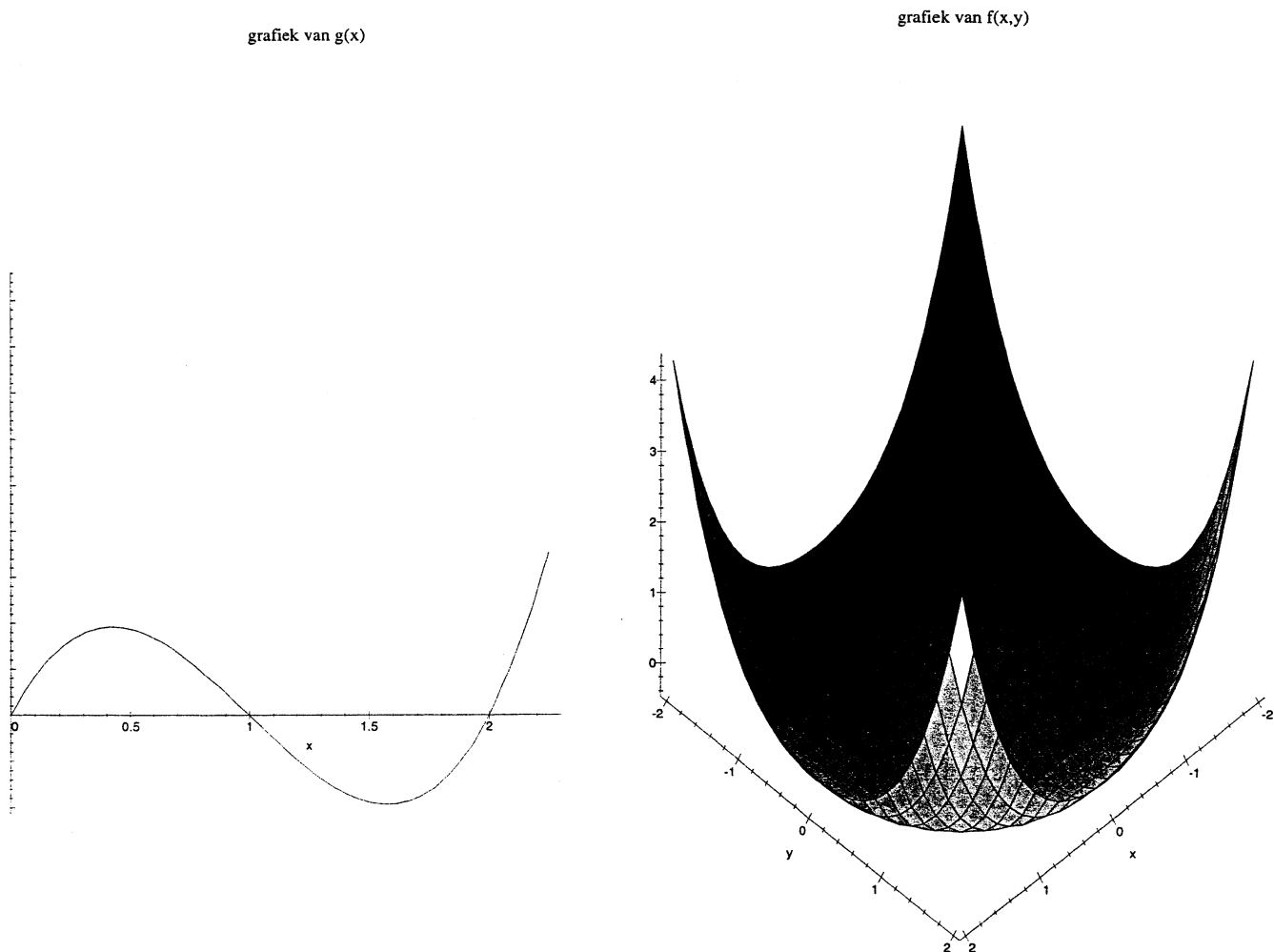
Dit stelt ons voor het volgende probleem: “Wanneer ligt er bij een stationair punt een vrij extreem?” We bespreken een drietal methoden die elk een oplossing kunnen bieden.

**Methode 1:** Deze methode maakt gebruik van niveaulijnen in combinatie met de volgende stelling:

**STELLING 8.3.2** *Laat  $f$  een element zijn van  $\mathcal{G}$  en  $D_f$  is een begrensde gebied inclusief zijn randpunten. Dan neemt  $f$  op  $D_f$  een globaal maximum en een globaal minimum aan.*

**Voorbeeld 8.3.9:** Gegeven is een functie  $f$  uit  $\mathcal{G}$  op  $\mathbb{R}^2$ . In figuur 8.11 is een gesloten niveaulijn van  $f$  getekend welke gedefinieerd wordt door  $f(x, y) = c$  waarbij  $c \in \mathbb{R}$ . Verder is gegeven dat  $P$  het enige stationaire punt is binnen de niveaukromme en dat  $f(x, y) < c$





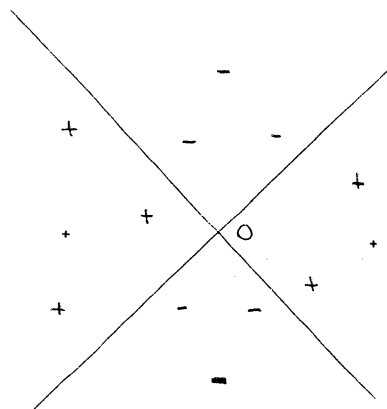
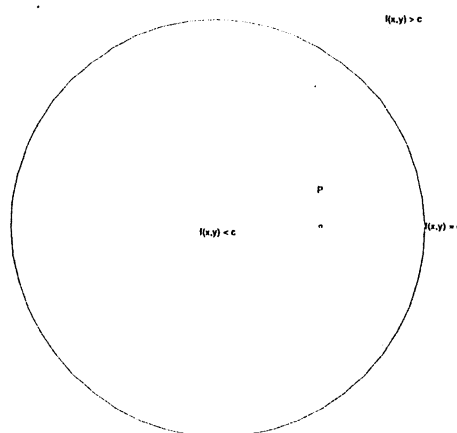
FIGUUR 8.9: Grafiek van  $g(x) = x(x - 1)(x - 2)$

als  $(x, y)$  een punt is binnen de niveaukromme. Als  $G$  nu het omsloten gebied inclusief de kromme is dan geldt volgens stelling 8.3.2 dat  $f$  een globaal maximum en globaal minimum aanneemt op  $G$ . Omdat de functiewaarden op het binnengebied kleiner zijn dan  $c$  wordt het globale minimum hierop aangenomen. Volgens stelling 8.3.1 moet dit  $P$  zijn. ( $P$  is namelijk het enige stationaire punt.) Dus  $f(P)$  is een globaal minimum op gebied  $G$  en dus een lokaal minimum op  $\mathbb{R}^2$ . ▀

**Voorbeeld 8.3.10:** Gegeven is de functie  $f(x, y) = (y - x^2)(y - 1)$ . Bepaal de extremen van  $f$  op  $\mathbb{R}^2$ . De stationaire punten worden gegeven door de oplossingen van

$$\begin{cases} -2x(y - 1) = 0 \\ 2y - 1 - x^2 = 0 \end{cases}$$

Na wat rekenwerk volgt dat ze gegeven worden door  $(0, \frac{1}{2})$ ,  $(-1, 1)$  en  $(1, 1)$ . De niveaukromme  $f(x, y) = 0$  wordt gegeven door figuur 8.12. Uit deze figuur kunnen we

FIGUUR 8.10: Tekenschema van  $g$ FIGUUR 8.11: Gesloten niveaulijn  $f(x, y) = c$ 

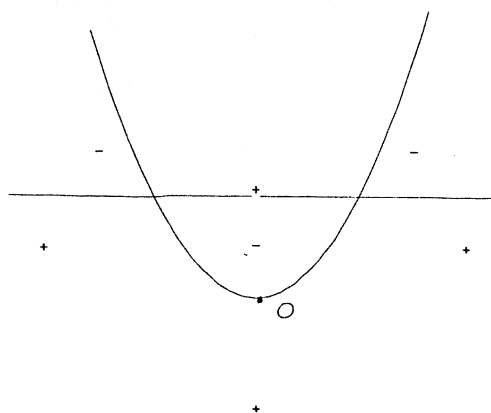
opmaken dat bij  $(-1, 1)$  en  $((1, 1)$  geen extremen liggen en dat bij  $(0, \frac{1}{2})$  een lokaal minimum ligt. Geef zelf een motivering. —■

De P.C. kan bij het bepalen van uiterste waarden een nuttige functie vervullen. Het volgende voorbeeld laat zien hoe dat in z'n werk kan gaan.

**Voorbeeld 8.3.11:** Beschouw de functie  $f(x, y) = 27x^2y + 14y^3 - 69y - 54x$ . De stationaire punten worden bepaald door het stelsel

$$S : \begin{cases} 54xy - 54 = 0 \\ 27x^2 + 42y^2 - 69 = 0 \end{cases}$$

Dit stelsel lossen we numeriek op. Daartoe bepalen we de snijpunten van de krommen die gedefinieerd worden door de twee vergelijkingen uit  $S$ . Een schets van de krommen (machinaal bepaald) wordt gegeven in de figuur 8.13: De eerste vergelijking uit  $S$  komt overeen met een hyperbool, en de tweede vergelijking komt overeen met met een ellips. Uit de figuur blijkt dat we vier stationaire punten hebben. Door de vergelijkingen op

FIGUUR 8.12: Tekenoverzicht van functie  $f$ 

te numeriek te lossen (welke methode hier gebruikt wordt vermelden we niet) komen we tot  $(1, 1)$ ,  $(-1, -1)$ ,  $(1.247219129, 0.8017837257)$  en  $(-1.247219129, -0.8017837257)$  als stationaire punten. Vervolgens bepalen we bij welk van deze punten een uiterste waarden ligt. We onderzoeken  $(1, 1)$ . Er geldt  $f(1, 1) = -82$ . We schetsen m.b.v. een PC de niveaukromme  $f(x, y) = -81,8$ . Deze blijkt punt  $(1, 1)$  als enige stationaire punt te omsluiten. Met 8.3.2 kunnen we concluderen dat bij  $(1, 1)$  een lokaal minimum van  $-82$  ligt. Op grond van symmetrie (vervang  $(x, y)$  door  $(-x, -y)$ ) kunnen we besluiten dat dat  $f(-1, -1) = 82$  een lokaal maximum is. Vervolgens onderzoeken we het stationaire punt  $Q = (1.247219129, 0.8017837257)$ . Nu is  $f(Q) = -81.78194003$ . Als we de niveaukromme  $f(x, y) = f(Q)$  laten schetsen krijgen we de figuur 8.14: Een voorzichtige conclusie is dat  $f(Q)$  geen extreem is (we komen hierop later terug). Stationaire punten waarbij geen extreem ligt worden *zadelpunten* genoemd. Op grond van symmetrie geldt dan ook dat  $(-1.247219129, -0.8017837257)$  een zadelpunt is. —

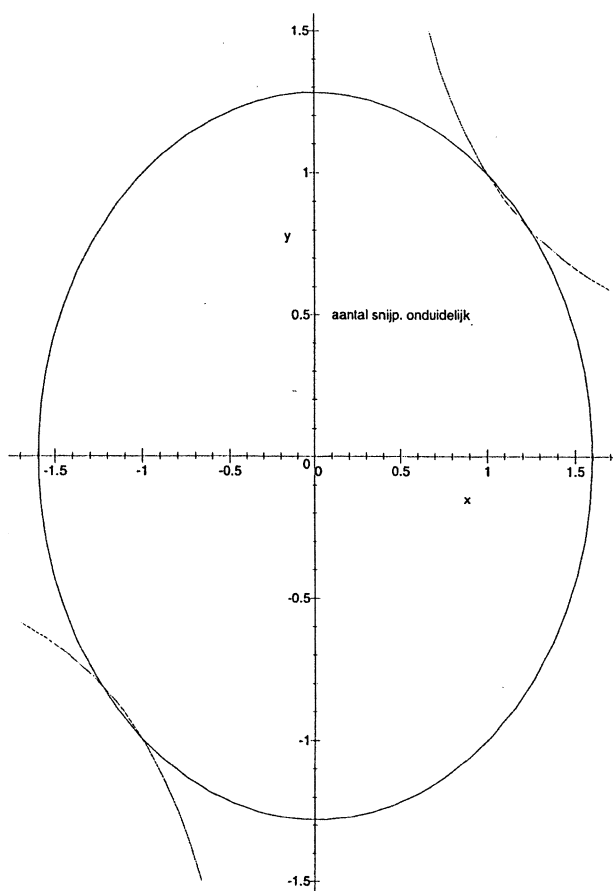
**Methode 2:** Deze methode verschilt weinig van de voorgaande. I.p.v. niveaulijnen maken we gebruik van een *gradiëntveld*. In de punten van het  $XY$ -vlak wordt de richting aangegeven van de gradiënt. M.b.v. formule 8.2 kunnen we dan opmaken in welke richting de functiewaarde toeneemt. Beschouw het volgende voorbeeld:

**Voorbeeld 8.3.12:** In figuur 8.15 is het gradiëntveld getekend van de functie  $f(x, y) = x^2 + y^2$ . Het “pijlte” geeft de richting aan van  $\nabla f(x, y) = (2x, 2y)$  in het punt  $(x, y)$ . M.b.v. dit veld en formule 8.2 kunnen we besluiten dat  $f$  een lokaal minimum aanneemt in  $(0, 0)$ . —

**Voorbeeld 8.3.13:** In figuur 8.16 is het gradiëntveld getekend van de functie  $g(x, y) = x^2 - y^2$ . Aan dit veld kunnen we zien dat de functiewaarde van  $g$  toeneemt als we vanuit  $O$  over de  $x$ -as weglopen. Daarentegen neemt de functiewaarde af als we vanuit  $O$  over de  $y$ -as weglopen. Conclusie: Bij het stationaire punt  $(0, 0)$  ligt geen extreem; het is een zadelpunt. —

**Voorbeeld 8.3.14:** Gegeven is de functie  $(x^2 - 2y)e^{2x - x^2 - \frac{y^2}{4}}$  op  $-5 < x < 5, -5 < y < 5$ . Duidelijk zal zijn dat het handmatig bepalen van de extremen een “crime” is. M.b.v. de

Plaatje van de krommen in de 4 kwadranten

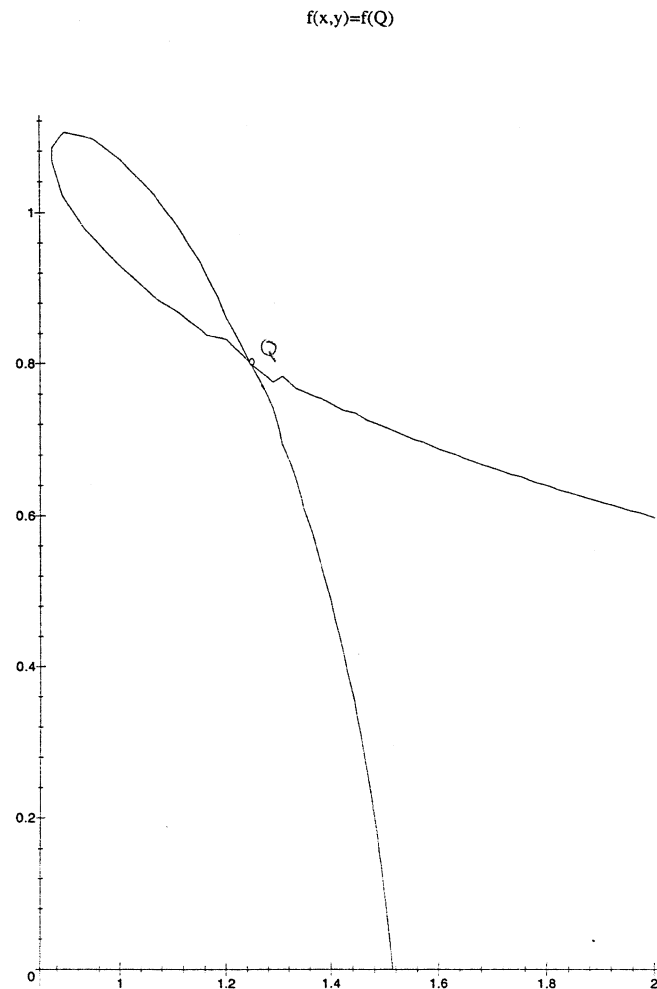
FIGUUR 8.13: Een schets van de krommen uit stelsel  $S$ 

computer schetsen we het gradiëntenveld. Zie hiervoor figuur 8.17. Daaruit is op te maken dat bij  $P \approx (1, 2)$  een lokaal minimum en bij  $Q \approx (1, -1)$  een lokaal maximum ligt. We

lossen het stelsel  $\begin{cases} f_x(x, y) = 0 \\ f_y(x, y) = 0 \end{cases}$  machinaal op en komen tot het volgende resultaat:

- $f(0.72072, 1.55002) = -3.55866$  is een lokaal minimum.
- $f(1.34743, -1.03138) = 7.16179$  is een lokaal maximum.

**Methode 3:** Deze methode maakt gebruik van de zogenaamde tweede afgeleide test. Deze test is een generalisatie van de volgende stelling welke op de middelbare school behandeld is.



**FIGUUR 8.14:** Een schets van de niveaukromme  $f(x, y) = f(Q)$

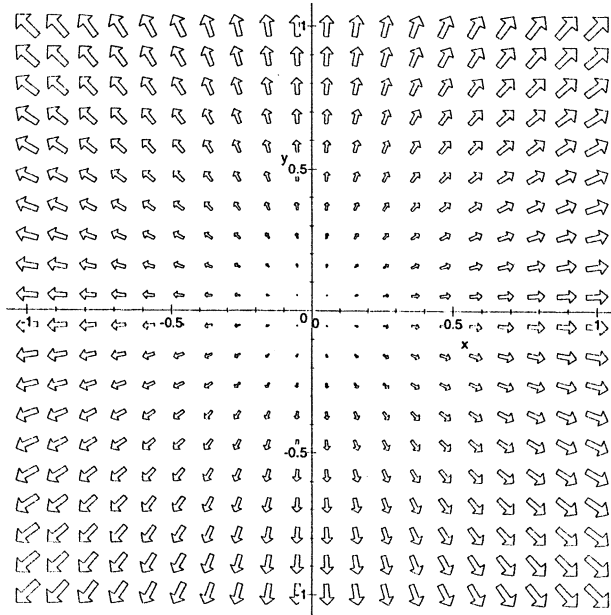
**STELLING 8.3.3** *Laat  $f$  een tweemaal continu differentieerbare functie zijn op een open interval  $I \subset \mathbb{R}$ .  $a$  is een punt in  $I$  met  $f'(a) = 0$ . Dan geldt:*

- *Als  $f''(a) > 0$  dan is  $f(a)$  een lokaal minimum.*
- *Als  $f''(a) < 0$  dan is  $f(a)$  een lokaal maximum.*

We geven een toepassing van deze stelling.

**Voorbeeld 8.3.15:** Laat  $f(x) = \sin x$  dan is  $f'(\frac{\pi}{2}) = 0$  en  $f''(\frac{\pi}{2}) = -1$ . Dus  $f(\frac{\pi}{2})$  is een lokaal maximum. ▀

We merken op dat er geen uitspraak wordt gedaan voor  $f''(a) = 0$ . Het volgende voorbeeld laat zien waarom we in dit geval geen conclusies kunnen trekken.



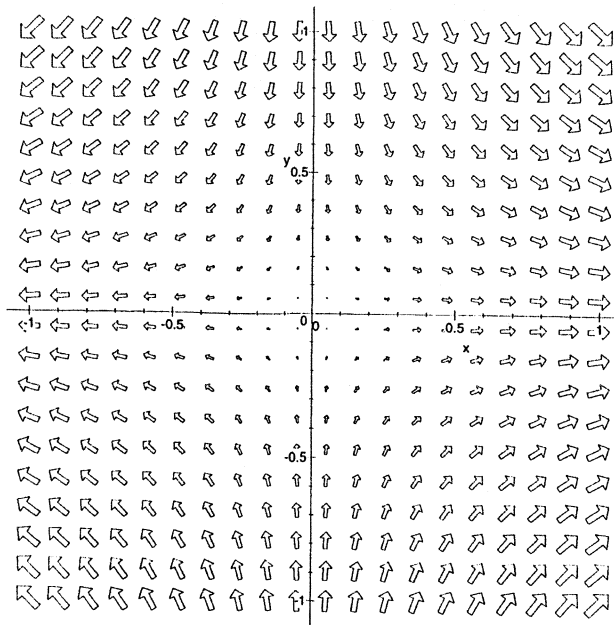
**FIGUUR 8.15:** Het gradiëntveld van de functie  $f(x, y) = x^2 + y^2$

**Voorbeeld 8.3.16:** Beschouw de functies  $f(x) = x^3$  en  $g(x) = x^4$ . Duidelijk is dat  $f(0)$  geen extreem is en  $g(0)$  wel. Nu geldt  $f'(0) = g'(0) = 0$  en  $g''(0) = f''(0) = 0$ . Om dus een besluit te kunnen nemen op grond van de tweede afgeleide of een stationair punt een uiterste waarde is, moet de tweede afgeleide ongelijk aan 0 zijn. —

Nu is het resultaat van stelling 8.3.3 meetkundig duidelijk:

Als  $f''(a) > 0$  dan is  $f$  in de buurt van  $a$  convex (hol) en als  $f''(a) < 0$  dan is  $f$  in de buurt van  $a$  concaaf (bol). Dus als  $a$  een stationair punt is en  $f$  is in de buurt van  $a$  convex dan hebben een situatie zoals in figuur 8.18 is geschetst. Derhalve is  $f(a)$  een minimum. En als  $f$  in de buurt van  $a$  concaaf is dan hebben we een plaatje als in figuur 8.19, en dus is  $f(a)$  een maximum. Voor functies van twee variabelen generaliseren we deze meetkundige gedachte. Stel  $(a, b)$  is een stationair punt, dat wil zeggen  $f_x(a, b) = 0$  en  $f_y(a, b) = 0$ . Beschouw in punt  $(a, b)$  een vlakkenwaaier waarvan de as loodrecht staat op het  $XY$ -vlak. Stel elke snijkromme tussen de grafiek van  $f$  en een vlak uit de vlakkenwaaier is convex in de “buurt” van  $(a, b)$ . Op meetkundige gronden is dan duidelijk dat  $f(a, b)$  een lokaal minimum is. Ook zal om dezelfde redenen helder zijn dat als elke snijkromme tussen een vlak uit de waaier en de grafiek van  $f$  concaaf is in de nabijheid van  $(a, b)$  dat  $f(a, b)$  een lokaal maximum is. Als we de stelling 8.3.3 juist toepassen op deze krommen krijgen we het volgende resultaat:

- Als  $(a, b)$  een stationair punt is en  $\frac{\partial^2}{\partial \mathbf{v}^2} f(a, b) > 0$  voor alle eenheidsrichtingsvectoren  $\mathbf{v}$  dan is  $f(a, b)$  een lokaal minimum.
- Als  $(a, b)$  een stationair punt is en  $\frac{\partial^2}{\partial \mathbf{v}^2} f(a, b) < 0$  voor alle eenheidsrichtingsvectoren  $\mathbf{v}$  dan is  $f(a, b)$  een lokaal maximum.



FIGUUR 8.16: Het gradiëntveld bij de functie  $g(x, y) = x^2 - y^2$

We kunnen  $\frac{\partial^2}{\partial \mathbf{v}^2} f(x, y)$  uitdrukken in tweede orde partiële afgeleiden naar  $x$  en  $y$ . We gebruiken hierbij twee keer vergelijking (8.2).

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{v}^2} f(x, y) &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \left( \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} f(x, y) \right) \\
 &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} (f_x(x, y)v_1 + f_y(x, y)v_2) \\
 &= \frac{\partial}{\partial x} (f_x(x, y)v_1 + f_y(x, y)v_2)v_1 + \frac{\partial}{\partial y} (f_x(x, y)v_1 + f_y(x, y)v_2)v_2 \\
 &= f_{xx}(x, y)v_1^2 + 2f_{xy}(x, y)v_1v_2 + f_{yy}(x, y)v_2^2.
 \end{aligned}$$

Derhalve geldt dat als  $v_2 \neq 0$  dat

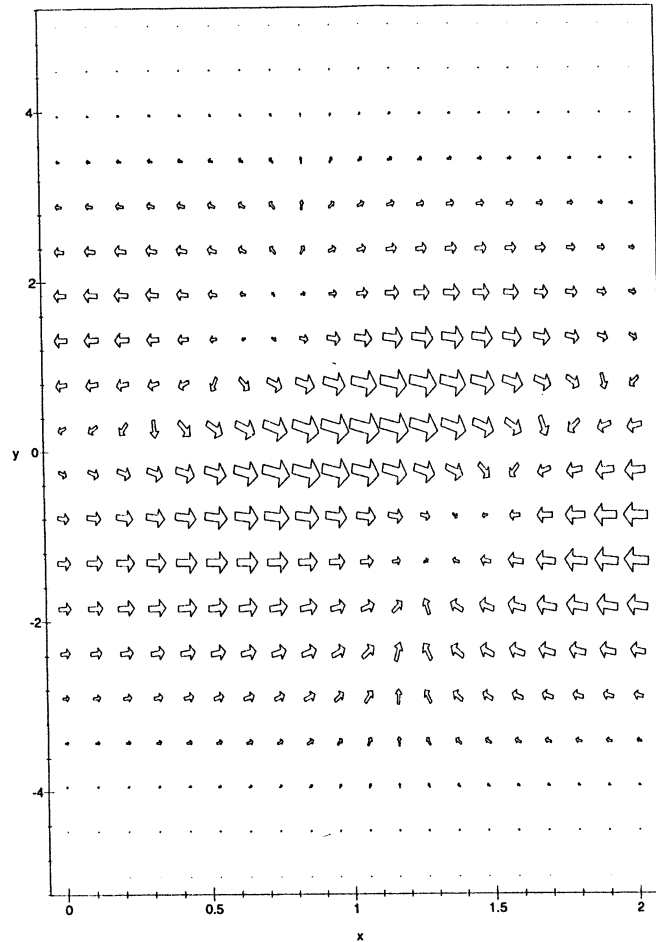
$$\frac{\partial^2}{\partial \mathbf{v}^2} f(a, b) = v_2^2 (f_{xx}(a, b) \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^2 + 2f_{xy}(a, b) \left(\frac{v_1}{v_2}\right) + f_{yy}(a, b)).$$

De kwadratische uitdrukking in  $v_1/v_2$  tussen de haakjes is tekenvast (d.w.z. altijd positief of altijd negatief) als de discriminant  $4f_{xy}^2(a, b) - 4f_{xx}(a, b)f_{yy}(a, b) < 0$ . [Waarom?] Dit laatste is equivalent met

$$\det \begin{bmatrix} f_{xx}(a, b) & f_{xy}(a, b) \\ f_{yx}(a, b) & f_{yy}(a, b) \end{bmatrix} > 0.$$

De determinant uit de laatste ongelijkheid noteren we als  $H(a, b)$  en wordt aangeduid met de *Hessiaan*. Er geldt nu:

- $\frac{\partial^2}{\partial \mathbf{v}^2} f(a, b) < 0$  voor alle  $\mathbf{v}$  met  $v_2 \neq 0$  als  $H(a, b) > 0$  en  $f_{xx} < 0$ ;



FIGUUR 8.17: Het gradiëntveld bij de functie  $(x^2 - 2y)e^{2x - x^2 - \frac{y^2}{4}}$

- $\frac{\partial^2}{\partial \mathbf{v}^2} f(a, b) > 0$  voor alle  $\mathbf{v} \neq 0$  als  $H(a, b) > 0$  en  $f_{xx} > 0$ ;
- $\frac{\partial^2}{\partial \mathbf{v}^2} f(a, b)$  is niet tekenvast als  $H(a, b) < 0$  is.

Het laatste wil zeggen dat er richtingsvectoren  $\mathbf{v}_1$  en  $\mathbf{v}_2$  zijn, waarvan de tweede coördinaat ongelijk 0 is, en waarvoor geldt

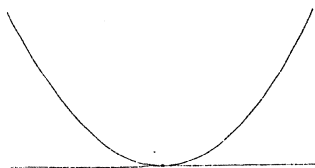
$$\frac{\partial^2}{\partial \mathbf{v}_1^2} f(a, b) < 0 \text{ en } \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{v}_2^2} f(a, b) > 0.$$

Dit betekent dat er een snijkromme te vinden is die concaaf is in de buurt van  $(a, b)$  en er is een snijkromme te vinden die convex is in de buurt van  $(a, b)$ . In dit geval ligt er bij  $(a, b)$  dus een zadelpunt.

Ten slotte bespreken we het geval waarbij  $v_2 = 0$ . Dan is

$$\frac{\partial^2}{\partial \mathbf{v}_2^2} f(a, b) = f_{xx}(a, b)v_1^2.$$





FIGUUR 8.18: Situatieschets waarbij  $f'(a) = 0$  en  $f''(a) > 0$

Omdat  $v_1^2 + v_2^2 = 1$  geldt  $v_1^2 > 0$ . Dus

- $\frac{\partial^2}{\partial \mathbf{v}_2^2} f(a, b) > 0$  als  $f_{xx} > 0$
- $\frac{\partial^2}{\partial \mathbf{v}_2^2} f(a, b) < 0$  als  $f_{xx} < 0$ .

Dit alles leidt tot het volgende resultaat:

**STELLING 8.3.4** Laat  $f$  een functie zijn uit  $\mathcal{G}$  en  $(a, b)$  is een stationair punt. Dan geldt:

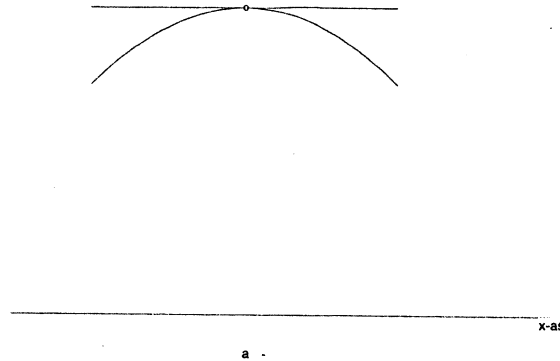
- $f(a, b)$  is een lokaal minimum als  $H(a, b) > 0$  en  $f_{xx} > 0$ .
- $f(a, b)$  is een lokaal maximum als  $H(a, b) > 0$  en  $f_{xx} < 0$ .
- $(a, b)$  is een zadelpunt als  $H(a, b) < 0$

We verwijzen in het vervolg naar deze stelling als *de tweede afgeleide test*. We merken op dat voor de gevallen waarbij  $H(a, b) = 0$  en/of  $f_{xx} = 0$  geen uitspraak wordt gedaan. In deze gevallen zijn voorbeelden te geven waarbij  $f(a, b)$  een extreem is en voorbeelden waarbij  $(a, b)$  een zadelpunt is.

**Voorbeeld 8.3.17:** We beschouwen de functie  $f(x, y) = x^2 + y^2$  op  $\mathbb{R}^2$ . Dan is  $f_x(x, y) = 2x$ ,  $f_y(x, y) = 2y$ ,  $f_{xx}(x, y) = 2$ ,  $f_{xy}(x, y) = f_{yx} = 0$  en  $f_{yy} = 2$ . Nu is  $\nabla f(0, 0) = (0, 0)$  en dus is  $(0, 0)$  een stationair punt. Nu is  $H(0, 0) = \det \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = 4 > 0$  en  $f_{xx}(0, 0) = 2$ .

Conclusie:  $f(0, 0) = 0$  is een lokaal minimum. —

**Voorbeeld 8.3.18:** We beschouwen de functie  $g(x, y) = x^2 - y^2$ . Dan is  $g_x(x, y) = 2x$ ,  $g_y(x, y) = -2y$ ,  $g_{xx} = 2$ ,  $g_{xy}(x, y) = g_{yx}(x, y) = 0$  en  $g_{yy}(x, y) = -2$ . Dus  $(0, 0)$  is een zadelpunt van  $g$  omdat  $H(0, 0) = \det \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = -4 < 0$ . —



FIGUUR 8.19: Situatieschets waarbij  $f'(a) = 0$  en  $f''(a) < 0$

**Voorbeeld 8.3.19:** Beschouw de functie uit voorbeeld 8.3.5. In dit voorbeeld hebben we berekend dat  $Q = (1, 247219129, 0.8017837257)$  een stationair punt is. M.b.v. niveaulijnen hebben we de voorzichtige conclusie getrokken dat dit punt een zadelpunt is. Het woord “voorzichtig” kunnen we weglaten als we de tweede afgeleide test op bijbehorende functie toepassen. Er geldt  $H(x, y) = 4536y^2 - 2916x^2$  en dus is  $H(Q) = -1620.000001 < 0$  en dus is  $Q$  een zadelpunt. —

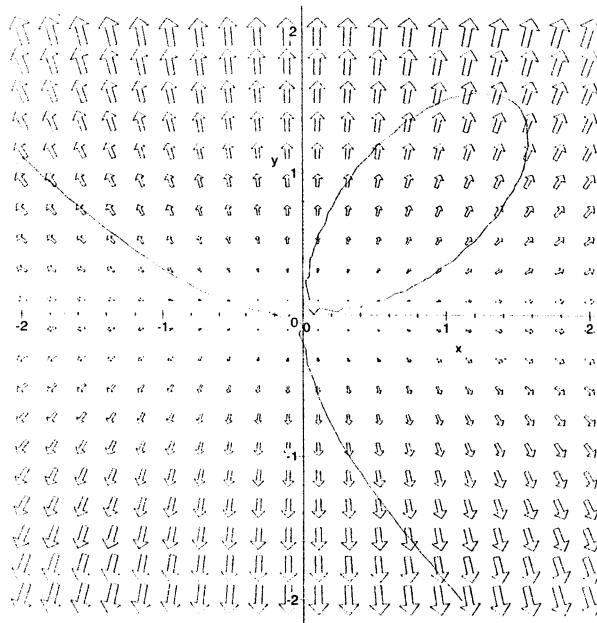
### 8.3.2 Berekening van randextremen

Allereerst bekijken we extremen van functies van twee variabelen uit  $\mathcal{G}$  op een verzameling  $D$  waarbij  $D$  overeenkomt met een kromme uit  $\mathbb{R}^2$ . ( $D$  bestaat uit alleen randpunten.)

**Voorbeeld 8.3.20:** Gegeven is de functie  $f(x, y) = x^2 + y^2$  en  $D$  is de ellips  $x^2 + 4y^2 = 1$ . Nu is  $D$  een begrensd gebied met rand, dus volgens stelling 8.3.2 neemt  $f$  op  $D$  een globaal maximum en een globaal minimum aan. Door  $\frac{1}{4}(1 - x^2)$  voor  $y^2$  in  $f(x, y)$  te substitueren krijgen we de functie  $g(x) = x + \frac{1}{4}(1 - x^2) = -\frac{1}{4}x^2 + x + \frac{1}{4}$  waarbij  $-1 \leq x \leq 1$ . De extremen van  $g$  liggen bij  $x = -1$  (lokaal minimum), bij  $x = 1$  (lokaal maximum) en bij  $x = 2$  (lokaal maximum). Omdat  $x = 2$  buiten het gegeven domein valt, heeft  $f$  een globaal maximum bij  $(1, 0)$  en een globaal minimum bij  $(-1, 1)$ . Deze worden respectievelijk gegeven door 1 en -1. Het bovenstaande resultaat verkrijgen we ook als we de ellips parametriseren als  $x(t) = \cos t$  en  $y(t) = \frac{1}{2} \sin t$  met  $t \in [0, 2\pi]$ . Na substitutie in  $f$  verkrijgen we een functie  $h$  welke gedefinieerd wordt door  $h(t) = f(\cos t, \frac{1}{2} \sin t) = \cos^2 t + \frac{1}{4} \sin^2 t$  waarbij  $t \in [0, 2\pi]$ .  $h$  heeft een maximum 1 voor  $t = 0$  en een minimum -1 voor  $t = \pi$ . Dus  $f(1, 0) = 1$  is een globaal maximum en  $f(-1, 0) = -1$  is een globaal minimum. —

In bovenstaand voorbeeld konden we het probleem door bijvoorbeeld te parametriseren herleiden tot het bepalen van uiterste waarden een functie van één variabele. Dit parametriseren lukt niet altijd. Hiervan geven we een voorbeeld:

**Voorbeeld 8.3.21:** Gegeven de functie  $f(x, y) = x^2 + 3y^2$  waarbij  $D$  gegeven wordt door de kromme welke bepaald wordt door de vergelijking  $x^3 + y^3 - 3xy = 0$ . (Deze kromme wordt het folium van Descartes genoemd.) Een schets van de kromme wordt gegeven in figuur 8.20. Gevraagd wordt de extremen te bepalen van  $f$  op  $D$ . Een aanpak zoals in



**FIGUUR 8.20:** Het folium van Descartes

het vorige voorbeeld werkt hier niet. (Waarom niet?) —

Een methode die tot een oplossing kan leiden is de zogenaamde *multiplicatorenmethode van Lagrange*. Stel  $f(x_0, y_0)$  is een uiterste waarden van  $f$  op  $D$  waarbij  $D$  gedefinieerd wordt door de vergelijking  $g(x, y) = 0$  met  $g$  een functie uit  $\mathcal{G}$ . Stel verder dat  $\nabla f(x_0, y_0) \neq (0, 0)$  en  $\nabla g(x_0, y_0) \neq (0, 0)$ . Beschouw nu de niveaokrommen  $f(x, y) = f(x_0, y_0)$  en  $g(x, y) = 0$ . Als deze kromme elkaar snijden maar niet raken dan kan  $f(x_0, y_0)$  nooit een extreem zijn. Beschouw daartoe figuur 8.7. Dus de twee niveaokrommen moeten elkaar raken in  $(x_0, y_0)$ . Dit houdt dan in dat de gradiënten van  $f$  en  $g$  in  $(x_0, y_0)$  in elkaars verlengde liggen (ze zijn dus afhankelijk). Derhalve geldt dat

$$\det \begin{bmatrix} f_x(x_0, y_0) & f_y(x_0, y_0) \\ g_x(x_0, y_0) & g_y(x_0, y_0) \end{bmatrix} = 0.$$

Dit leidt dan tot de volgende stelling:

**STELLING 8.3.5 (de multiplicatorenmethode van Lagrange)** *Laat de kromme  $D$  gegeven worden door de vergelijking  $g(x, y) = 0$  met  $g \in \mathcal{G}$ . Gegeven is op  $D$  de functie  $f \in \mathcal{G}$ . Stel  $f(x_0, y_0)$  is een extreem op  $D$  zodat  $\nabla f(x_0, y_0) \neq (0, 0)$  en  $\nabla g(x_0, y_0) \neq (0, 0)$ . Dan geldt:  $(x_0, y_0)$  is een oplossing van het stelsel*

$$\begin{cases} f_x(x, y)g_y(x, y) - f_y(x, y)g_x(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases}.$$

**Voorbeeld 8.3.22:** Gegeven is de functie  $f(x, y) = x + y^2$  op  $D$  welke gegeven wordt door de vergelijking  $x^2 + 4y^2 = 1$ . (Zie een van de vorige voorbeelden.) Gevraagd: Bepaal de uiterste waarden van  $f$  op  $D$ . Nu is  $\nabla f(x, y) = (1, 2y)$  en  $\nabla g(x, y) = (2x, 8y)$ . Omdat de gradiënten van  $f$  en  $g$  op  $D$  ongelijk  $(0, 0)$  zijn, geldt dat extremen van  $f$  liggen bij de oplossingen van het stelsel

$$\begin{cases} 8y - 4xy = 0 \\ x^2 + 4y^2 - 1 = 0 \end{cases} .$$

De oplossingen van dit stelsel worden gegeven door  $(1, 0)$  en  $(-1, 0)$ . Omdat  $D$  een begrensde gebied is met rand geldt volgens stelling 8.3.2 dat bij deze punten een globaal minimum en globaal maximum ligt. —

**Voorbeeld 8.3.23:** Gegeven is de functie  $f(x, y) = x^2 + 3y^2$  waarbij  $D$  de kromme is die gegeven wordt door de formule  $x^3 + y^3 - 3xy = 0$ . Dan is  $\nabla f(x, y) = (2x, 6y)$  en  $\nabla g(x, y) = (3x^2 - 3y, 3y^2 - 3x)$ . Het stelsel wordt dan gegeven door

$$\begin{cases} 2x(3y^2 - 3x) - 6y(3x^2 - 3y) = 0 \\ x^3 + y^3 - 3xy = 0 \end{cases} .$$

Dit stelsel ziet er niet al te vriendelijk uit. Als we figuur 8.20 bekijken dan zien we dat in het eerste kwadrant in de buurt van  $(1, 1.5)$  het stelsel een oplossing moet hebben. We bepalen deze numeriek en komen tot  $Q = (1.37533, 1.57196)$  als locatie voor een kandidaat-extreem. Een nadere inspectie van het gradiëntveld wijst uit dat we te maken hebben met een lokaal maximum welke gegeven wordt door  $f(Q) = 9.30472$ . Andere kandidaten kunnen liggen bij punten waarbij  $\nabla f(x, y) = (0, 0)$  of  $\nabla g(x, y) = (0, 0)$ . Dus punten die een nader onderzoek nodig hebben zijn  $(0, 0)$  en  $(1, 1)$ . Nu ligt  $(1, 1)$  niet op  $D$  en dus blijft  $(0, 0)$  over. Bestudering van figuur 8.20 resulteert in de conclusie dat  $f(0, 0) = 0$  een lokaal minimum is. Dit laatste wordt ook bevestigd door het gegeven dat  $f(x, y) = x^2 + 3y^2 \geq 0$  voor alle  $(x, y)$ . Ten slotte merken we op dat vanwege de onbegrensde van  $D$  we er niet zeker van zijn of we alle extremen van  $f$  hebben gevonden. Dit vereist een grondigere analyse welke we hier achterwege zullen laten. —

Tot besluit van deze paragraaf bestuderen we functies op een gebied  $D$  waarbij  $D$  niet alleen randpunten maar ook inwendige punten bevat.

**Voorbeeld 8.3.24:** Gegeven is de functie  $f(x, y) = x^2 - y^2$  en de gebieden  $D_1 = \{(x, y) | x \geq 1\}$  en  $D_2 = \{(x, y) | x \leq 1\}$ . Gevraagd: Bepaal de uiterste waarden van  $f$  op  $D_1$  en  $D_2$ .  $D_1$  is een halfvlak waarvan de rand gegeven wordt door de lijn  $x = 1$ . Allereerst bepalen we de uiterste waarden van  $f$  op deze lijn. Duidelijk is dat  $f(1, 0) = 1$  een lokaal maximum is op de rand van  $D_1$ . (D.w.z. t.o.v. de randpunten van  $D_1$ .)

Vraag: Ligt bij dit punt ook een uiterste waarde als we de inwendige punten van  $D_1$  erbij betrekken?

Nu is  $\nabla f(1, 0) = (2, 0)$ . Als we de eenheidsvector  $\mathbf{v}$  gelijk aan  $(1, 0)$  kiezen geldt dat  $\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} f(1, 0) = 2 > 0$ . D.w.z de functie  $f$  stijgt als we vanuit  $(1, 0)$  in de richting van  $(1, 0)$  wegllopen. We trekken de conclusie dat bij  $(1, 0)$  geen extreem ligt. Verder geldt dat  $\nabla f(x, y) \neq (0, 0)$  op  $D_1$  en dus worden er geen uiterste waarden aangenomen op het inwendige van  $D_1$ .

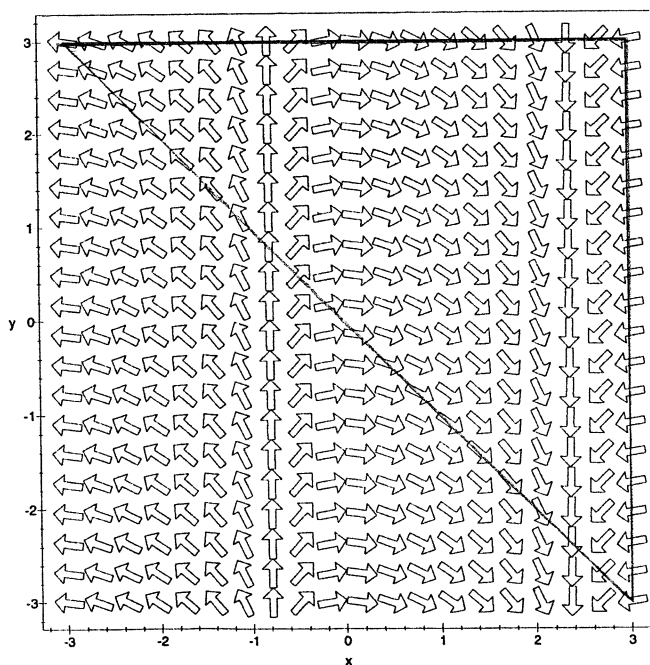
Nu het verhaal voor  $D_2$ : Zie hiervoor gedeeltelijk de vorige beschouwing. Nu geldt dat als we van uit  $(1,0)$  weglopen in een richting waarvan de hoek met de gradiënt groter is dan  $\frac{\pi}{2}$  (dus  $D_2$  in) dat de bijbehorende richtingsafgeleide kleiner is dan 0. D.w.z. dat functiewaarden kleiner worden als we  $D_2$  inlopen. Derhalve trekken we de conclusie dat  $f(1,0)$  een lokaal maximum is van  $f$  op  $D_2$ . —■

**Voorbeeld 8.3.25:** Bepaal van  $f(x,y) = x^2 + 3y^2$  de extremen op  $D$  waarbij  $D$  gegeven wordt door het gebied in het eerste kwadrant dat ingesloten wordt door het folium van Descartes. (Zie hiervoor voorbeeld 8.3.16 en figuur 8.22.) Het betreft hier een begrensd gesloten gebied met rand dus per stelling neemt  $f$  een globaal maximum en minimum aan op  $D$ . Uit het gradiëntveld blijkt dat  $f$  geen uiterste waarden aanneemt op het inwendige van  $D$  en dus worden ze op de rand aangenomen. Conclusie:  $f(0,0) = 0$  is een globaal minimum en  $f(1.37533, 1.57196)$  is een globaal maximum. —■

**Voorbeeld 8.3.26:** Gegeven is de functie  $f(x,y) = \sin x e^{x-y}$  met domein

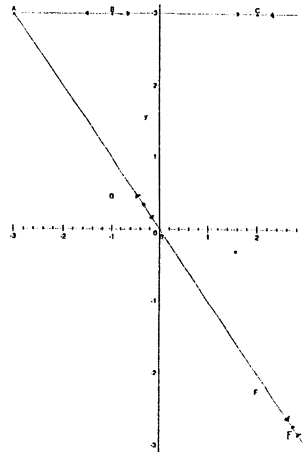
$$D = \{(x,y) | x \leq 3, y \leq 3, x + y \geq 0\}.$$

(zie figuur 8.21). Uit deze figuur volgt dat  $f$  geen inwendige extremen aanneemt. Omdat



**FIGUUR 8.21:** Het gradiëntveld van  $f$

$D$  een begrensd gebied met rand is, geldt dat erop de rand minstens twee extremen door  $f$  worden aangenomen. tevens kunnen we uit dit gradiëntveld het pijlendiagram zoals geschetst in figuur 8.22 afleiden. De richting van de pijlen geeft aan in welke richting de functiewaarde toeneemt. Hieruit is af te leiden dat de punten  $B, D$  en  $G$  in aanmerking komen voor een locatie van een minimum en dat de punten  $A, C$  en  $F$  in aanmerking komen

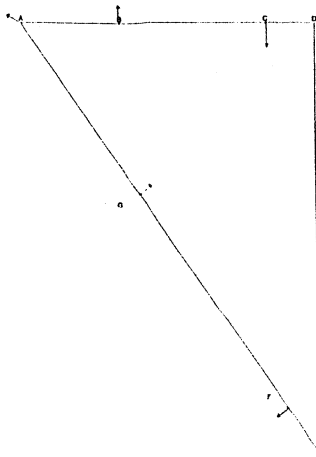
FIGUUR 8.22: De rand van  $D$ 

voor een locatie van een maximum. In  $E$  neemt  $f$  zeker geen extreem aan. In de gegeven kandidaat-punten tekenen we de gradiënten. Dit geeft de figuur 8.23 We concluderen dat  $f$  in  $A$  en  $F$  een lokaal maximum aanneemt, in  $D$  en  $G$  een lokaal minimum aanneemt en in  $B$  en  $C$  geen extreem aanneemt. Resultaat:

- $f(A) = \sin(-3)e^{-6} = 0.00035$ . (lokaal maximum)
- $f(D) = \sin 3 = 0.14112$ . (lokaal minimum)
- $G, F$ : Hier geldt  $x + y = 0$ . M.b.v.  $g(x) = f(x, -x) = \sin xe^{2x}$  kunnen we afleiden dat  $f(F) = f(2.67795, -2.67795) = 94.74330$  een globaal maximum is en dat  $f(G) = f(-0.46365, 0.46365) = -0.17693$  een globaal minimum is.

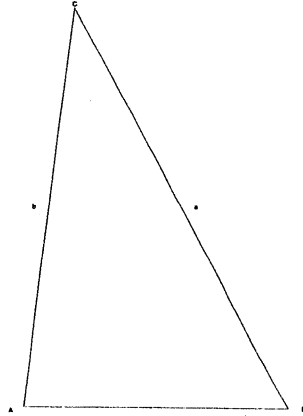
### OPGAVEN (bij hoofdstuk 8)

- h 1. Gegeven is de grootte  $\gamma$  die afhankelijk is van de grootheden  $\alpha$  en  $\beta$ . Stel  $\alpha = a + \Delta a$  en  $\beta = b + \Delta b$ . Schat de fout in  $\gamma(a, b)$  t.g.v.  $\Delta a$  en  $\Delta b$  als  $\gamma(\alpha, \beta)$  gegeven wordt door
- (a)  $\alpha + \beta$ .
  - (b)  $\alpha - \beta$ .
  - (c)  $\alpha\beta$ .
  - (d)  $\frac{\alpha}{\beta}$ .
- h 2. Gegeven is een driehoek  $ABC$  waarbij  $\alpha = \angle CAB$ . Zie hiervoor figuur 8.24. Stel  $\alpha$  is gelijk aan  $p + \Delta p$ , zijde  $b$  is gelijk aan  $q + \Delta q$  en zijde  $c$  is gelijk aan  $r$  waarbij de onnauwkeurigheid 0 is. Schat de onnauwkeurigheid in de oppervlakte  $S$  t.g.v. de gegeven onnauwkeurigheden in  $\alpha$  en  $b$ . (Hint:  $S = \frac{1}{2}bc\sin \alpha$ )



FIGUUR 8.23: De gradiënt in de kandidaat-randextremen

- h 3. Gegeven de lenzenformule  $\frac{1}{f} = \frac{1}{v} + \frac{1}{b}$ . Hierin is  $f$  de brandpuntsafstand,  $v$  de voorwerpafstand en  $b$  beeldafstand van de lens. Zie figuur 8.25. In de tekening is het beeld van het voorwerp geconstrueerd door gebruikmaking van enkele wetten m.b.t. de gang der lichtstralen. Dit zijn: lichtstralen evenwijdig aan de hoofdas gaan door het brandpunt  $F_2$ , lichtstralen door het centrum van de lens gaan ongebroken verder en lichtstralen door het brandpunt  $F_1$  lopen na breking evenwijdig aan de hoofdas.
- (a) Leid de Lenzenformule meetkundig af.
- (b) Geef een schatting van de onzekerheid in de brandpuntsafstand  $\Delta f$  t.g.v. de onzekerheden in  $v$  en  $b$  welke gegeven worden door respectievelijk  $\Delta v$  en  $\Delta b$ .
- h 4. Schat m.b.v. de linearisering
- (a)  $\sqrt{1.02^3 + 1.97^3}$ .
- (b)  $\sin 27^\circ \tan 47^\circ$ . (gemeen!)
- d 5. Bepaal de afgeleide van  $f(x, y) = x^2 - 6y^2$  in punt  $P = (7, 2)$  in de richting van  $(1, 1)$  en  $(-1, 1)$ . Bepaal tevens de richting in  $P$  waarin de richtingsafgeleide maximaal is.
- d 6. Gegeven is de functie  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Bereken  $\nabla f(x, y)$  en geef een verklaring voor de richting van de gradiënt.
- t 7. Gegeven is de niveaukromme  $f(x, y) = c$ . Laat  $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$  een punt zijn op deze niveaukromme waarin de gradiënt ongelijk aan  $(0, 0)$  is. Bewijs dat de vergelijking van de raaklijn aan de kromme in  $(a_1, a_2)$  gegeven wordt door  $\nabla f(a_1, a_2) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a}) = 0$ .
- t 8. Van de middelbare school kennen we de volgende regel: De grafieken van  $f$  en  $g$  snijden elkaar loodrecht in  $P = (a, f(a)) = (a, g(a))$  als  $f'(a)g'(a) = -1$ . Bewijs dit. (Hint: Identificeer de grafieken van  $f$  en  $g$  met niveaukrommen van functies van twee variabelen.)



FIGUUR 8.24: Driehoek behorend bij opgave 1

- t 9. We bewijzen de *kettingregel voor functies van twee variabelen*. Dat is:

$$\frac{d}{dt}f(x(t), y(t)) = f_x(x(t), y(t))x'(t) + f_y(x(t), y(t))y'(t).$$

Hierin is  $f$  een functie uit  $\mathcal{G}$  en zijn  $x$  en  $y$  twee differentieerbare functies van  $t$ .

- (a) Laat  $k$  een kromme zijn die gedefinieerd wordt door

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ f(x(t), y(t)) \end{bmatrix}.$$

Geef meetkundige motieven voor de volgende bewering: Er zijn reële getallen  $\alpha$  en  $\beta$  te vinden zó dat

$$\begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ \frac{d}{dt}f(x(t), y(t)) \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ f_x(x(t), y(t)) \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ f_y(x(t), y(t)) \end{bmatrix}.$$

- (b) Bepaal  $\alpha$  en  $\beta$  en bewijs vervolgens de kettingregel.

- t 10. Als de functie  $g$  gedefinieerd wordt door  $g(u, v) = f(x(u, v), y(u, v))$  waarbij  $f, x$  en  $y$  functies zijn uit  $\mathcal{G}$  zijn.

- (a) Laat zien dat

$$\frac{\partial}{\partial u}f(x(u, v), y(u, v)) = f_x(x(u, v), y(u, v))x_u(u, v) + f_y(x(u, v), y(u, v))y_u(u, v).$$

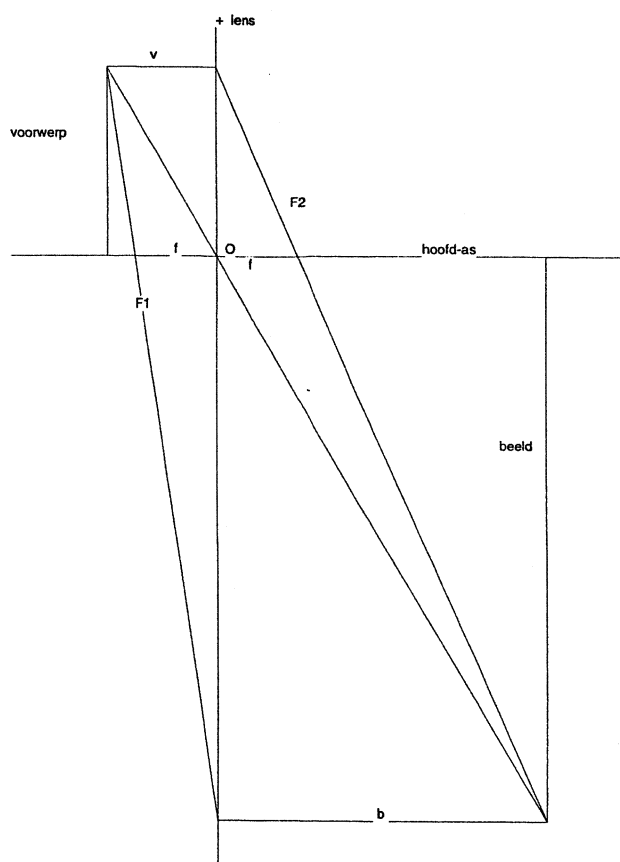
- (b) Laat zien dat

$$\frac{\partial}{\partial v}f(x(u, v), y(u, v)) = f_x(x(u, v), y(u, v))x_v(u, v) + f_y(x(u, v), y(u, v))y_v(u, v).$$

- d 11. Bepaal de stationaire punten van

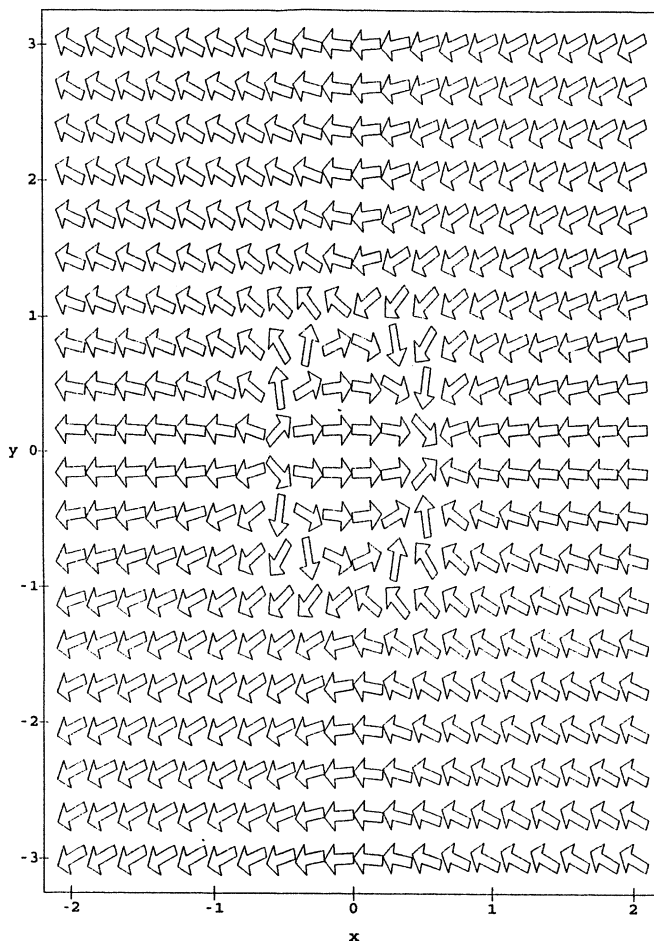
- (a)  $x^3 - 15x^2 - 20y^2 + 5$ .  
 (b)  $x^3y^2(1 - x - y)$ .





FIGUUR 8.25: Constructie van het beeld

- h 12. Bepaal de uiterste waarden van  $f(x, y) = (2x^2 - y)(2 - y)$  op  $\mathbb{R}^2$ .
- h 13. Bepaal de uiterste waarden van  $f(x, y) = (2x^2 - y)(2 - y)$  op  $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 5\}$ .
- h 14. Gegeven is de functie  $f(x, y) = (y^2 - x - 1)(y^2 + x - 1)$ . Bepaal de uiterste waarden van  $f$  en hun aard (d.i. maximum of minimum) op
- $\mathbb{R}^2$ .
  - $\{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$ .
- h 15. Bepaal de uiterste waarden van  $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x + 2y$  op  $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 4\}$ .
- h 16. De functie  $f$  is op  $\mathbb{R}^2$  gegeven door  $f(x, y) = x - xy^2 - x^3$ .
- Bepaal de stationaire punten van  $f$ .
  - Bepaal de extremen van  $f$  met behulp van het gradiëntveld van figuur 8.26.



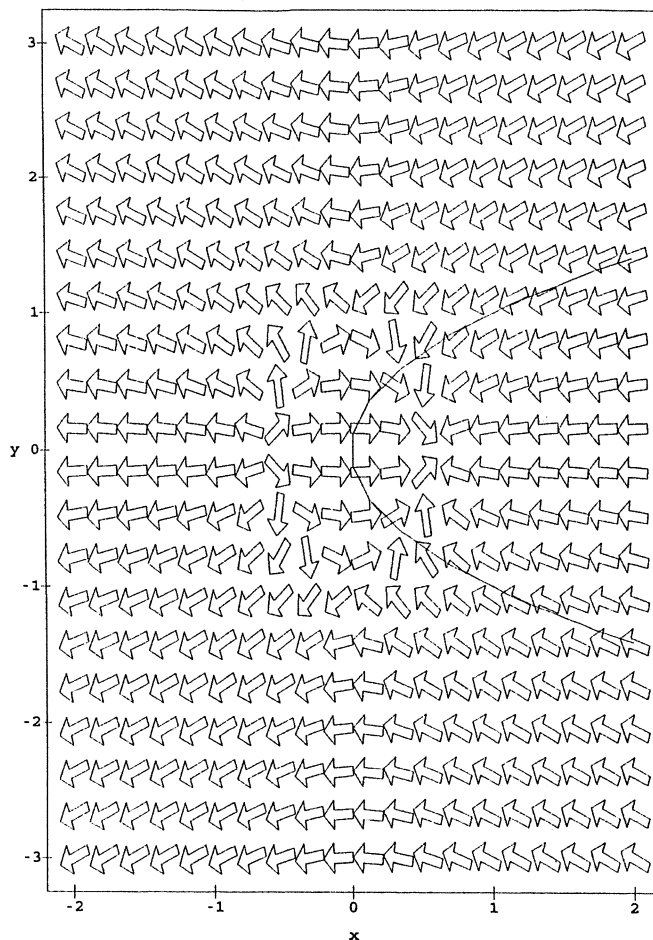
FIGUUR 8.26: Het gradiëntveld van  $f$

- (c) Bepaal de uiterste waarden m.b.v. de tweede afgeleide test.  
 (d) Pas de multiplicatoren - methode van Lagrange toe om de uiterste waarden te bepalen van  $f$  op de kromme  $x - y^2 = 0$ .  
 (e) Zie vorig onderdeel maar nu door substitutie van  $y^2 = x$  in  $f(x, y)$ .  
 (f) Bepaal de extremen van  $f$  op het gebied  $\{(x, y) | x - y^2 \geq 0\}$  met behulp van het gradientveld uit figuur 8.27 en de vorige resultaten.

h 17. Een rechthoekige tank zonder deksel en hoogte 1, heeft een volume van  $4m^3$ . De afmetingen van het grondvlak worden gegeven door  $x$  en  $y$ . Bepaal  $x$  en  $y$  zó dat de som van de oppervlakten van de wanden minimaal is.

h 18. Gegeven de lijnen  $l$  en  $m$  gedefinieerd door de parametervoorstellingen

$$l := \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$



FIGUUR 8.27: Het gradiëntveld van  $f$  en de kromme  $x = y^2$

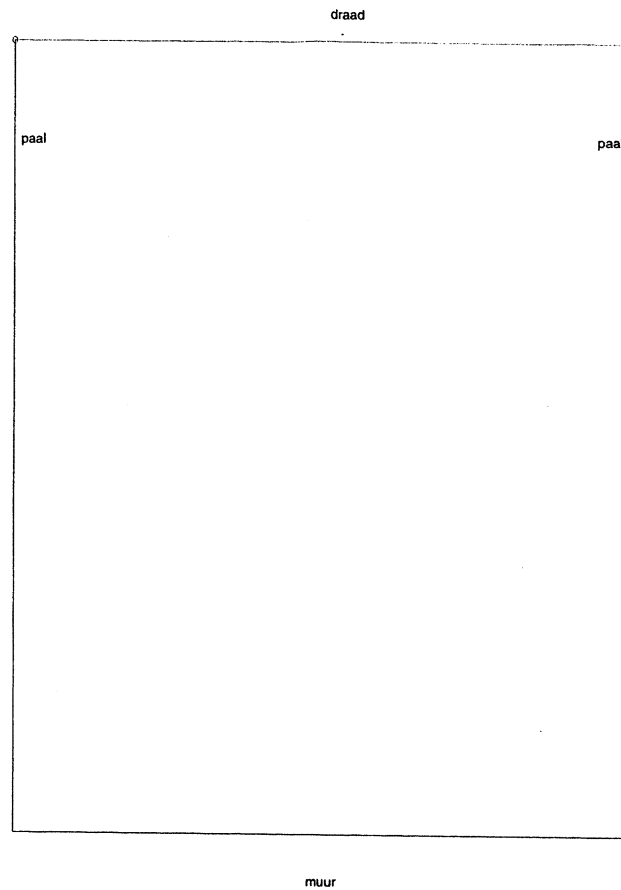
$$l := \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 5 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

- (a) Bepaal meetkundig de afstand tussen  $l$  en  $m$ .  
 (b) Bepaal analytisch de afstand tussen deze lijnen. (Stel een functie op in  $\alpha$  en  $\beta$  en bepaal de uiterste waarden van deze functie.)

d 19. Bepaal de uiterste waarden van  $f(x, y) = x^2 + y^2$  op de verzameling  $x - y + 1 = 0$

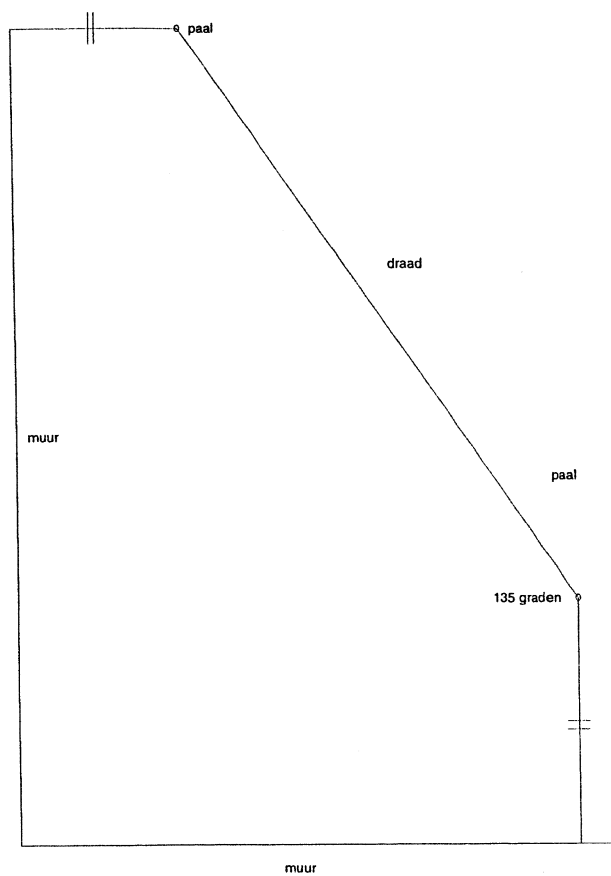
- (a) door substitutie.  
 (b) m.b.v. de multiplicatoren - methode van Lagrange.

h 20. Een boer wil z'n geit laten grazen op een deel van een groot grasland dat moet worden omheind door een hek. In de schuur vindt hij 2 palen en een draad van 60m lang. Bepaal de maximale oppervlakte van het afgeperkte gebied in de volgende twee situaties:



**FIGUUR 8.28:** Omheining behorend bij a

- (a) De afperking wordt gegeven door figuur 8.28.  
 (b) De afperking wordt gegeven door figuur 8.29.
- r **21.** Bepaal de uiterste waarden van de volgende functies:
- (a)  $f(x, y) = e^{-x}(3 + 3y - y^3) + (y - 2)^2 + 40e^{-(x^2+y^2)}$  voor  $-2 \leq x \leq 2, -2 \leq y \leq 2$ .  
 (b)  $f(x, y) = 50y^2 - x$  op  $x^2 + 2y^2 - \sin(x + y) = 0$ .  
 (c)  $f(x, y) = (x - 1)^2 + y^2$  op  $(x + y)^2 + y^2 - \sin(2y^2) = 0$
- r **22.** Bepaal in  $\mathbb{R}^2$  de afstand van de oorsprong tot de hyperbool met de vergelijking  $x^2 + 8xy + 7y^2 = 225$ .
- h **23.** Los de problemen die gesteld zijn in de voorbeelden 8.1.1 en 8.1.2 op.



**FIGUUR 8.29:** Omheining behorend bij b



# Formules

## Goniometrische formules

$$(G.1) \quad \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$(G.2) \quad \sin(-x) = -\sin x$$

$$(G.3) \quad \cos(-x) = \cos x$$

$$(G.4) \quad \sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

$$(G.5) \quad \cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$(G.6) \quad \sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$(G.7) \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2 \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1$$

$$(G.8) \quad \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

$$(G.9) \quad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$

## Standaard Taylorpolynomen met orde van de resttermen:

$$(T.1) \quad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \mathcal{O}(x^{n+1})$$

$$(T.2) \quad \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \mathcal{O}(x^{n+1})$$

$$(T.3) \quad \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{n} + \mathcal{O}(x^{n+1})$$

$$(T.4) \quad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^{k-1} \cdot \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + \mathcal{O}(x^{2k+1})$$

$$(T.5) \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^k \cdot \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \mathcal{O}(x^{2k+2})$$

$$(T.6) \quad \arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{k-1} \cdot \frac{x^{2k-1}}{2k-1} + \mathcal{O}(x^{2k+1})$$

## Integraaltabel

$$\begin{aligned}
 (I.1) \quad \int \frac{1}{x^2 + a^2} dx &= \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + c & [a > 0] \\
 (I.2) \quad \int \frac{1}{x^2 - a^2} dx &= \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + c & [a > 0] \\
 (I.3) \quad \int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx &= \arcsin \frac{x}{a} + c & [a > 0] \\
 (I.4) \quad \int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx &= \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + c & [a > 0] \\
 (I.5) \quad \int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx &= \ln|x + \sqrt{x^2 - a^2}| + c & [a > 0] \\
 (I.6) \quad \int \sqrt{a^2 - x^2} dx &= \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + c & [a > 0] \\
 (I.7) \quad \int \sqrt{x^2 + a^2} dx &= \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + c & [a > 0] \\
 (I.8) \quad \int \sqrt{x^2 - a^2} dx &= \frac{x}{2} \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \ln|x + \sqrt{x^2 - a^2}| + c & [a > 0] \\
 (I.9) \quad \int \frac{1}{\sin x} dx &= \ln |\tan \frac{1}{2}x| + c = \ln \left| \frac{1 - \cos x}{\sin x} \right| + c \\
 (I.10) \quad \int \frac{1}{\cos x} dx &= \ln |\tan(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\pi)| + c = \ln \left| \frac{1 + \sin x}{\cos x} \right| + c \\
 (I.11) \quad \int \frac{1}{\sin^2 x} dx &= -\frac{\cos x}{\sin x} + c \\
 (I.12) \quad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx &= \tan x + c \\
 (I.13) \quad \int e^{ax} \sin bx dx &= \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \sin bx - b \cos bx) + c & [a^2 + b^2 \neq 0] \\
 (I.14) \quad \int e^{ax} \cos bx dx &= \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \cos bx + b \sin bx) + c & [a^2 + b^2 \neq 0] \\
 (I.15) \quad \int \sin mx \sin nx dx &= \frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)} - \frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)} + c & [m^2 \neq n^2] \\
 (I.16) \quad \int \cos mx \cos nx dx &= \frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)} + \frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)} + c & [m^2 \neq n^2] \\
 (I.17) \quad \int \sin mx \cos nx dx &= -\frac{\cos(m-n)x}{2(m-n)} - \frac{\cos(m+n)x}{2(m+n)} + c & [m^2 \neq n^2] \\
 (I.18) \quad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^n x dx &= \begin{cases} \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (n-1)}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots n} \cdot \frac{\pi}{2} & [n \text{ oneven en } \geq 3] \\ \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots n} & [n \text{ even en } \geq 2] \end{cases}
 \end{aligned}$$



Reductieformules ( $n \in \mathbb{Z}$ )

$$(R.1) \quad \int x^n e^x dx = x^n e^x - n \int x^{n-1} e^x dx$$

$$(R.2) \quad \int \frac{1}{(x^2 + a)^n} dx = \frac{1}{2a(n-1)} \cdot \frac{x}{(x^2 + a)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2a(n-1)} \int \frac{1}{(x^2 + a)^{n-1}} dx \quad [n \neq 1]$$

$$(R.3) \quad \int \sin^n x dx = -\frac{1}{n} \sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x dx \quad [n \neq 0]$$

$$(R.4) \quad \int \cos^n x dx = \frac{1}{n} \cos^{n-1} x \sin x + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x dx \quad [n \neq 0]$$

$$(R.5) \quad \int \sin^n x \cos^m x dx = -\frac{\sin^{n-1} x \cos^{m+1} x}{n+m} + \frac{n-1}{n+m} \int \sin^{n-2} x \cos^m x dx \quad [n \neq -m]$$

$$(R.5') \quad \int \sin^n x \cos^m x dx = \frac{\sin^{n+1} x \cos^{m-1} x}{n+m} + \frac{m-1}{n+m} \int \sin^n x \cos^{m-2} x dx \quad [n \neq -m]$$

## Integraalbenaderingsformules

De trapeziumregel:  $\int_a^b f(x) dx = T_h + R_T$  met

$$T_h = \frac{1}{2}h (f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \dots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)),$$

en

$$|R_T| \leq \frac{b-a}{12} h^2 M.$$

Hierbij is  $h = \frac{b-a}{n}$ ,  $|f''(x)| \leq M$  op  $[a, b]$  en

$$x_0 = a, x_1 = a + h, x_2 = a + 2h, \dots, x_{n-1} = a + (n-1)h, x_n = a + nh = b.$$

De Simpsonregel:  $\int_a^b f(x) dx = S_h + R_S$  met

$$S_h = \frac{1}{3}h (f(x_0) + 4f(t_1) + 2f(x_1) + 4f(t_2) + \dots + 2f(x_{n-1}) + 4f(t_n) + f(x_n)),$$

en

$$|R_S| \leq \frac{b-a}{180} h^4 M.$$

Hierbij is  $h = \frac{b-a}{2n}$ ,  $|f^{(4)}(x)| \leq M$  op  $[a, b]$ ,

$$x_0 = a, x_1 = a + 2h, x_2 = a + 4h, \dots, x_{n-1} = a + 2(n-1)h, x_n = a + 2nh = b,$$

en

$$t_1 = a + h, t_2 = a + 3h, \dots, t_n = a + (2n-1)h.$$



## Antwoorden Hoofdstuk 5

1. a.  $\frac{3}{2}$ . b.  $\frac{-3}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{5}{4}$ . c. 12.
3. d.  $\frac{1}{2}$
5. a.  $\int_0^1 (1+x)^2 dx$  of  $\int_1^2 x^2 dx$ . b.  $\int_0^2 \sin(x+2) dx$  of  $\int_2^4 \sin x dx$ . c.  $\int_0^2 \frac{1}{2+x} dx$  of  $\int_2^4 \frac{1}{x} dx$ .  
d.  $\int_0^1 x^3 dx$ .
6. a. oppervlakte van een cirkel met straal 1.
8. a.  $\frac{100}{3}$ . b.  $s(t) = \frac{1}{3}t^3$ . c.  $\frac{100}{3}$
9. a.  $\pi$ . b.  $\frac{-3}{2} + 2\sqrt{2}$ . c. 1.
10.  $\frac{7}{6}$ .
11. a.  $2x - 2$ . b. 1.
12. 0.
13.  $t_1(x) = t_2(x) = 20x$ .
14. 1.
16. a.  $\int_0^1 f(x) dx$ . b.  $2 \int_0^1 x dx = 1$ . c.  $\int_0^1 \sin \pi x dx = \frac{2}{\pi}$ .
17. a.  $\frac{2A}{\pi}$ . b.  $110\pi$ .
18. a.  $\frac{1}{3} \ln^3 x$ . b.  $\frac{1}{5} \sin^5 x$ . c.  $\cos x + x \sin x$ . d.  $x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$ . e.  $\frac{1}{2} x^3 e^{2x} - \frac{3}{4} x^2 e^{2x} + \frac{3}{4} x e^{2x} - \frac{3}{8} e^{2x}$ . f.  $\frac{3}{16} (4x+1)^{\frac{4}{3}}$ .
19. a.  $\ln(\ln(\ln x))$ . b.  $\frac{2^x}{\ln 2}$ . c.  $\frac{-1}{3} \sin^2 x \cos x - \frac{2}{3} \cos x$ . d.  $\frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{2} x$ . e.  $-\ln \cos x$ . f.  $\ln(\tan x) - \frac{1}{2} \ln(1 + \tan^2 x)$ . g.  $x \ln^2 x - 2x \ln x + 2x$ . h.  $\frac{1}{a^2+b^2} e^{ax} (a \cos bx + b \sin bx)$ .  
i.  $-\ln(1+e^x) + x$ .
20. a.  $I_n = \frac{-\sin^{n-1} x \cos x}{n} + \frac{n-1}{n} I_{n-2}$ . b.  $I_n = x^n e^x - n I_{n-1}$
21. a.  $\arctan x$ . b.  $\frac{-1}{1+x}$ . c.  $\frac{1}{2} \ln(1+x^2)$ . d.  $\frac{1}{1+x} + \ln(1+x)$ . e.  $\arctan(1+x)$ . f.  $\frac{1}{2} \ln(x^2 + 2x + 2) - \arctan(1+x)$ . g.  $\frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{2} \ln(x-1) - \frac{1}{2} \ln(1+x)$ . h.  $\frac{1}{3} \arctan x^3$ .  
i.  $2 \ln \frac{|x-1|}{|2+x|} - \frac{1}{x-1}$ . j.  $\ln |x-1| - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) - \frac{3}{2} \arctan x - \frac{1}{4} \frac{2x-4}{x^2+1}$ .
23. a.  $\frac{1}{2} \arccos \frac{2}{x}$ . b.  $-\frac{\sqrt{4+x^2}}{4x}$ . c.  $3 \ln \frac{3-\sqrt{9-4x^2}}{|2x|} + \sqrt{9-4x^2}$ .
24. a.  $2\sqrt{x+1} + 2 \ln \frac{2-\sqrt{x+1}}{2+\sqrt{x+1}}$ . b.  $-\arccos x + \sqrt{1-x^2}$ . c.  $\frac{3}{2} \ln(\sqrt[3]{x^2+1})$ . d.  $2 \arctan \sqrt{\frac{x-1}{2-x}}$ .
25. a.  $\frac{1}{8} \pi^2 + \frac{3}{2} \pi - 1$ . b.  $\frac{1}{6} a^2$ .
26.  $\pi ab$ .
27.  $e^{10} + 1 - \frac{2}{e}$ .

28. a.  $\frac{\pi}{7}(3^7 - 1)$ . b.  $96\frac{4}{5}\pi$ .
29. b.  $20\pi^2$ . c.  $2\pi R\pi r^2 = 2\pi^2 Rr^2$ .
30. a.  $\pi\frac{64}{5}$ . b.  $\pi\frac{32}{3}$ .
31.  $\frac{72}{5}$ .
32. b. een vierkant. c.  $\frac{16}{3}$ .
33.  $\pi abh$ .
34. d. 1. e.  $\frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{4}\ln(2 + \sqrt{5})$ .
35. a.  $\frac{1}{2}$ . b.  $\frac{-1}{2}$ .
39. a.  $2, \frac{11}{4}, \frac{77}{144}$ . b.  $2, \frac{8}{3}, \frac{109}{216}$ . c.  $2, \frac{8}{3}, \frac{1}{2}$ .
41.  $\frac{38}{3}$ .
42. a.  $\leq \frac{4}{3} \times 10^{-5}$ . b. 0.69314.
43. a.  $|R_T| \leq \frac{\pi^3}{384n^2}$ . b.  $n \geq 9$ . c.  $|R_S| \leq \frac{\pi^5}{180 \cdot 8^3 \cdot n^4}, n \geq 2$ .
49. a. 2. b.  $\frac{1}{2}$ . c. divergent. d.  $\frac{\pi}{4}$ .
50.  $\frac{-1}{4}$ .
51. a. 4. b. divergent.
52. a. convergent. b. divergent. c. convergent. d. divergent. e. convergent. f. convergent.
53. a. convergent. b. convergent. c. divergent. d. divergent.

### Antwoorden Hoofdstuk 6

1. a.  $\mathbb{R}^+, x = \frac{11+3\sqrt{13}}{2}$ . b.  $t \in \mathbb{R}$  m.u.v.  $t = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ , lege verzameling. c.  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  m.u.v.  $y = 2x, 7x + 5y = 0$  m.u.v.  $(0,0)$ .
2. a.  $x \in \mathbb{R}, \mathbb{R}_0^+$ . b.  $t \in \mathbb{R}$ , eenheidscirkel. c.  $(x, y) \in \mathbb{R}$  m.u.v.  $y = 0, \mathbb{R}^+$ .
4. a.  $z = \sqrt{16 - x^2}, -10 \leq y \leq 10, -4 \leq x \leq 4, [0, 4]$ . b.  $z = \sqrt{100 - x^2 - y^2}, x^2 + y^2 \leq 100, [0, 10]$ . c.  $z = \frac{-10}{4}\sqrt{x^2 + y^2} + 10, x^2 + y^2 \leq 16, [0, 10]$ . d.  $y = ax + b, x \in \mathbb{R}, \mathbb{R}$  als  $a \neq 0, b$  als  $a = 0$ . e.  $z = \sin x, (x, y) \in \mathbb{R}^2$ . f.  $z = \sin x \cos y, (x, y) \in \mathbb{R}^2$ .
5.  $12 - \sqrt{1 - \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16}}, \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} \leq 1, [0, 12]$ .

6. a. lijnstuk van  $(0,0)$  naar  $(4,4)$ . b. cirkel,  $M(-1,2), r = 2$ . c. spiraal van twee omwentelingen. d. spiraal van twee omwentelingen in het platte vlak. e. spiraal van twee omwentelingen in het platte vlak.
7. a.  $\begin{bmatrix} r \cos \varphi + a \\ r \sin \varphi + b \end{bmatrix}, \varphi \in [0, 2\pi]$ . b.  $\begin{bmatrix} a \cos \varphi \\ b \sin \varphi \end{bmatrix}, \varphi \in [0, 2\pi]$ . c.  $\begin{bmatrix} \omega t - \sin \omega t \\ 1 - \cos \omega t \end{bmatrix}, t \geq 0, \omega$  is constant.
9. a.  $\begin{bmatrix} t \\ t^2 \end{bmatrix}, t \in \mathbb{R}$ . b.  $\begin{bmatrix} t \\ \sin t \end{bmatrix}, t \in [0, 2\pi]$ . c.  $\begin{bmatrix} t \\ |t| \end{bmatrix}, t \in [-2, 2]$ . d.  $\begin{bmatrix} t \\ f(t) \end{bmatrix}, t \in D$ .
10. b.  $\begin{bmatrix} (t-1)^2 - 1 \\ t-1 \end{bmatrix}, t \in [-1, 3]$ . c.  $\begin{bmatrix} (2t-2)^2 - 1 \\ (2t-2) \end{bmatrix}, t \in [0, 2]$ .
11. a.  $r(t) = R, \varphi(t) = t, t \in [0, 2\pi]$ . b.  $r(t) = t, \varphi(t) = \varphi_0, t \in \mathbb{R}_0^+$ . c.  $\varphi(t) = t, t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), r(t) = \frac{3}{\cos t}$ .
12. d. 8.
13. a.  $x = 0$  of  $y = 0$ . b. parabolen.
14. b.  $XZ$ -vlak dalparabool,  $YZ$ -vlak bergparabool.
16. a. i. ellipsen. ii. een regelmatig ei. b. een hyperbool in vlak  $x = a_1$ , een hyperbool in vlak  $y = b_1$ , een ellips in vlak  $z = c_1$ .
18. a.  $f_x = 2, f_y = 3$ . b.  $f_x = \frac{1}{2x}, f_y = \frac{1}{2y}$ . c.  $f_x = -(x^2 - 1), f_y = y^2 - 1$ .
22. a.  $2x + 3y + 6z = 49$ . b.  $-18x + 6y + z = 0$ . c.  $z = 4y$ .
23. b.  $0,0$ .

### Antwoorden Hoofdstuk 7

4. a. ~~16~~ b. ~~0~~ c. ~~-2~~ $\pi$ . d.  $8 - e$ .
5. a. 0. b.  $\frac{5}{6}$ . c.  $\frac{1}{2}e^4 - \frac{1}{2}e - \frac{3}{2}$ .
6.  $\frac{1}{4}$ .
7.  $\frac{13}{7}$ .
8.  $2(e - 1)$ .
10. a.  $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$ . b.  $\frac{1}{4} \ln 17$ .
13. a.  $x^2 + 2y^2 \leq 4$ . b.  $x^2 + y^2 \leq 9$ .
16.  $\int \int_G r dr d\varphi$ .

17. a. cirkel met straal 2. b. cirkelschijf met straal 2. c. segment in het eerste kwadrant tussen de  $x$ -as en  $y = \frac{1}{3}\sqrt{3}x$ . d. de lijn  $x = 2$ . e. de lijn  $x + y = 1$ . d. de cirkel  $M(0, 2), r = 2$ .
18. a.  $r \cos \varphi = 7$ . b.  $r \cos \varphi - r \sin \varphi = 3$ . c.  $4r^2 + 5r^2 \sin \varphi = 1$ . d.  $r^2 - 6r \cos \varphi - 2r \sin \varphi + 6 = 0$ .
19. c.  $0 \leq r \leq \frac{1}{\cos \varphi}$  als  $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$  en  $0 \leq r \leq \frac{1}{\sin \varphi}$  als  $\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$
20. a.  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \int_0^2 \sin(r^2) r dr \right) d\varphi$ . b.  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \int_{\frac{1}{\sin \varphi + \cos \varphi}}^2 \ln(r^2) dr \right) d\varphi$ .
21.  $2 - \frac{\pi}{2}$ .
22.  $\frac{3\pi}{16}$ .
23.  $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$ .
24.  $\frac{32}{9}$ .
25.  $\frac{\pi}{32} - \frac{1}{16}$ .
26. a.  $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ . b.  $\sqrt{\pi}$ .
28.  $t^{-1}(x, y) = \begin{bmatrix} r(x, y) \\ \varphi(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{x^2 + y^2} \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \end{bmatrix}$  als  $x > 0$  of  $t^{-1}(x, y) = \begin{bmatrix} r(x, y) \\ \varphi(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{x^2 + y^2} \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi \end{bmatrix}$  als  $x < 0$ .
29.  $3, \frac{1}{3}$ .
32.  $\frac{21}{4}(e^4 - e^{\frac{1}{4}})$ .
33.  $\frac{\pi\sqrt{3}}{16} - \frac{9}{32}$ .
34.  $\frac{3}{4}(e - \frac{1}{e})$ .
38. a.  $\int_0^1 \left( \int_0^{1-x} \left( \int_0^{1-x-y} f(P) dz \right) dy \right) dx$ . b.  $\int_{-1}^1 \left( \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \left( \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} f(P) dz \right) dy \right) dx$ .  
c.  $\int_{-1}^1 \left( \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \left( \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dz \right) dy \right) dx$ .
39.  $\frac{1}{2} \ln 2 - \frac{5}{16}$ .
40. a.  $\frac{16}{3}$ . b. vierkant. c.  $\frac{16}{3}$ .
43. a.  $XY$ -vlak. b.  $XY$ -vlak. c. cilinder met straal  $\sqrt{5}$  en de  $z$ -as als symmetrie-as. d. kegel. e.  $XZ$ -vlak. f. paraboloid. g. bol met straal 2 en centrum  $(0,0,0)$ . h. hyperboloid.
45. a.  $1 \leq r \leq 3, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq z \leq \sqrt{25 - r^2}$ . b.  $\frac{\sqrt{3}}{\cos \theta} \leq \rho \leq 2, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{6}$ .
46. a.  $\frac{4}{15}\pi$ . b.  $\frac{4}{15}\pi$ .

47.  $\frac{\pi^2}{4}$ .

48.  $\pi$ .

**Antwoorden Hoofdstuk 8**

1. a.  $\Delta a + \Delta b$ . b.  $\Delta a - \Delta b$ . c.  $a\Delta b + b\Delta a$ . d.  $\frac{b\Delta a - a\Delta b}{b^2}$ .

2.  $\frac{1}{2}r \sin p\Delta q + \frac{1}{2}qr \cos p\Delta p$ .

3.  $\frac{b^2}{(b+v)^2}\Delta v + \frac{v^2}{(b+v)^2}\Delta b$ .

4. a. 2.95. b. 0.490.

5.  $-5\sqrt{2}, -19\sqrt{2}, (\frac{7}{\sqrt{193}}, \frac{-12}{\sqrt{193}})$ .

6.  $\nabla f(x, y) = \left[ \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \right]$ .

11. a.  $(0,0), (10,0)$ .

12.  $f(0,1) = -1$  een lokaal minimum.

14. a.  $f(0,0) = 1$  een lokaal maximum. b.  $f(0,0) = 1$  een globaal maximum.  $-\frac{1}{4}$  is een globaal minimum aangenomen in de punten  $(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \pm\frac{\sqrt{2}}{2})$

16. a.  $(0, \pm 1), (\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, 0)$ . b. lokaal minimum  $-\frac{2}{9}\sqrt{3}$  aangenomen in  $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, 0)$ , een lokaal maximum van  $\frac{2}{9}\sqrt{3}$  aangenomen in  $(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0)$  en zadelpunten  $(0, \pm 1)$ . d. minimum 0 bij  $(0,0)$ . maximum  $\frac{5}{27}$  bij  $(\frac{1}{3}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}})$ . f. extremen in  $(0,0), (\frac{1}{3}, \frac{-1}{\sqrt{3}}), (\frac{1}{3}, \frac{1}{\sqrt{3}})$  en  $(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0)$  met respectievelijke waarden 0 (lokaal minimum),  $\frac{5}{27}$  (lokaal maximum),  $\frac{5}{27}$  (lokaal maximum) en  $\frac{2}{9}\sqrt{3}$  (globaal maximum).

17.  $x = y = 2$ .

18. 3.

19. minimum  $\frac{1}{2}$  bij  $(\frac{-1}{2}, \frac{1}{2})$ .

20. 15 bij 30.

